

فصل دوم ، عدد های حقیقی

درس اول : عددهای گویا

در سال های گذشته و همچنین فصل اول تا حدودی با اعداد گویا آشنا شدیم و می دانیم عدد گویا عددی است کسری که صورت و مخرج آن عددی صحیح و مخرج آن صفر نباشد (صورت می تواند صفر باشد). آیا می توانید مجموعه اعداد گویا را با اعضا نمایش دهید ؟ با نماد های ریاضی چطور ؟

نکته : هر عدد صحیح را می توان به صورت یک کسر نشان داد، پس هر عدد صحیح، یک عدد گویا است .

نکته : اگر علامت یک عدد گویا منفی باشد ، می توانیم آن را در صورت، مخرج یا کنار کسر بنویسیم؛

$$\frac{-4}{7} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$$

پیدا کردن کسرهایی بین دو کسر دلخواه : به روش های مختلفی می توان چند کسر بین دو کسر دلخواه پیدا کرد که با یک مثال به بررسی هریک از روش ها می پردازیم .

مثال ۱ : با هریک از روش های زیر ، چند کسر بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ بیابید .

الف) محاسبه ی میانگین: می دانیم میانگین دو عدد، بین آن ها قرار دارد، بنابراین اگر میانگین دو کسر را حساب کنیم، یک کسر بین آن ها به دست می آید.

ب) جمع صورت ها با هم و مخرج ها باهم:

ج) ضرب صورت و مخرج در یک عدد یکسان: برای استفاده از این روش ، ابتدا مخرج دو کسر را یکسان می کنیم، اگر به تعداد مورد نظر کسر ایجاد شد مسئله حل شده است، در غیر این صورت اگر از n کسر خواسته شده بود، صورت و مخرج را در $n+1$ ضرب می کنیم.

د) تبدیل کسر ها به اعشار:

مقایسه کسر ها : برای مقایسه کسر ها از سه روش می توان استفاده کرد :

الف : هم مخرج کردن ب (محاسبات ریاضی (طرفین وسطین یا اعشار) ج (نمایش هندسی

مثال ۲ : اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$$\frac{5}{6} \text{ و } \frac{2}{3} \text{ و } 1\frac{2}{3} \text{ و } \frac{7}{12} \text{ و } ۱,۵$$

نکته : در مقایسه کسر ها، دو حالت ممکن است پیش بیاید :

- ۱- اگر مخرج ها مساوی بودند: کسری بزرگتر است که صورت آن بزرگتر باشد، مانند :
- ۲- اگر صورت ها مساوی بودند: کسری بزرگتر است که مخرج آن کوچکتر باشد، مانند :

نکته : در مقایسه اعداد مخلوط، ابتدا قسمت های صحیح و سپس در صورت نیاز قسمت کسری را مقایسه می کنیم ، و یا با تبدیل آن ها به کسر، از روش های مقایسه کسر ها استفاده می کنیم.

مثال ۳ :

کسر های مسلسل : اگر کسری به شکل کسر زیر یا مشابه آن باشد، به آن کسر مسلسل می گوئیم و برای حل آن از پایین ترین قسمت مسئله را حل می کنیم و مرحله به مرحله کسر را ساده می کنیم.

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$$

مثال ۴ : حاصل کسر زیر را حساب کنید.

$$1 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$$

تبدیل کسر متعارفی به عدد اعشاری : برای تبدیل کسر به عدد اعشاری ، صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می کنیم که ۴ حالت ممکن است پیش بیاید .

الف) اگر در تقسیم صورت بر مخرج ، باقی مانده تقسیم صفر شود ، آن کسر را **مختوم** می گویند ، مانند : $\frac{4}{5} = 0.8$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر فقط عوامل ۲ و ۵ داشتیم ، آن کسر حتما مختوم است .

ب) اگر در تقسیم صورت بر مخرج، باقی مانده صفر نشود و در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود، آن را عدد اعشاری **متناوب ساده** می گویند.

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6} \quad \text{مانند:}$$

نکته: در مخرج کسر های متناوب ساده، عوامل اول ۲ و ۵ وجود ندارد.

ج) اگر در تقسیم صورت بر مخرج، باقی مانده صفر نشود و در خارج قسمت پس از یک یا چند رقم، عددی مرتب تکرار شود، آن را عدد اعشاری

$$\frac{4}{15} = 0.2\overline{6} \quad \text{متناوب مرکب می گویند. مانند:}$$

نکته: در مخرج کسر های متناوب مرکب، علاوه بر عوامل ۲ و ۵، عوامل اول دیگر نیز وجود دارد.

نکته: اعداد اعشاری مختوم، متناوب ساده و متناوب مرکب، نوعی عدد گویا هستند زیرا می توانیم آن ها را به صورت کسر بنویسیم.

دوره تناوب: به تعداد اعداد اعشاری که تکرار می شوند، دوره تناوب آن عدد می گویند؛ مانند:

کسر مولد: کسری که پس از ساده شدن، یک عدد اعشاری متناوب ساده یا مرکب را ایجاد می کند، کسر مولد آن عدد اعشاری نامیده می شود.

به عنوان مثال:

کسر $\frac{5}{9}$ ، کسر مولد عدد اعشاری متناوب ساده $0.\overline{5}$ است و یا کسر $\frac{7}{6}$ ، کسر مولد عدد اعشاری متناوب مرکب $1.1\overline{6}$ است.

د) در ادامه ی درس با حالت چهارم آشنا می شویم.

درس دوم؛ عددهای حقیقی :

اعداد گنگ: عددهایی که تعداد ارقام اعشاری آن ها نامتناهی و دارای دوره ی تناوب نمی باشند را اعداد گنگ یا اصم می گویند و با Q' یا Q^c نمایش می دهند.

اعدادی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{10}$ ، π و $0.100100010000100001\dots$ گنگ هستند.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ عددی گنگ است. مانند: $\sqrt{10}$ و $\sqrt{24}$

نکته: حاصل جمع یا تفریق دو عدد گنگ، ممکن است عددی گنگ یا گویا باشد.

$$\text{گنگ} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{گویا} \Rightarrow (\sqrt{2} + 1) + (-\sqrt{2} + 4) = 5$$

نکته: حاصل ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، می تواند عددی گنگ یا گویا باشد.

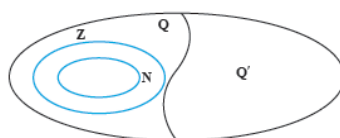
$$\text{گنگ} \Rightarrow \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6} \quad \text{گویا} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{گنگ} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{گویا} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$

نکته: حاصل جمع و یا ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگی، عددی گنگ است.

نکته: حاصل ضرب و تقسیم یک عدد گنگ و یک عدد گویا (غیر صفر)، عددی گنگ است.

مثال ۵: بین دو عدد ۵ و ۶، سه عدد گنگ بنویسید.



حال می توان مجموعه های اعداد را به صورت مقابل نمایش داد.

نمایش اعداد گنگ به شکل $\sqrt{n}$ روی محور: با حل یک مثال به توضیح این بخش می پردازیم.

مثال ۶: اعداد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{11}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

مثال ۷: داخل $\circ$ علامت $\in$ یا $\notin$ نبودن بگذارید.

$$\begin{array}{cccc} 4 \circ Q' & \sqrt{3/5} \circ Q & \sqrt{25} \circ R & \sqrt{0/9} \circ Q \\ -5 \circ Z & \sqrt{0/9} \circ Q' & \sqrt{18} \circ Q' & -0/2 \circ Z \\ -\frac{7}{3} \circ R & \frac{0}{6} \circ R & \frac{-9}{-1} \circ Z & \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \circ R \end{array}$$

مثال ۸: مجموعه های سطر اول را به مجموعه مساوی با آن در سطر دوم وصل کنید.

$$\begin{array}{ccccc} Z \cap N & Q' \cap R & Q \cap Q' & Q \cup Q' & Q \cap Z \\ Z & \emptyset & R & Q' & N \end{array}$$

اعداد حقیقی: مجموعه اعداد حقیقی، مجموعه ای شامل همه ی اعداد گویا و گنگ است، به عبارت ساده تر هر عددی که ما می شناسیم، عضو این

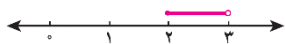
مجموعه است. مجموعه اعداد حقیقی را با R نمایش می دهیم که همان اجتماع اعداد گنگ و اعداد گویا است؛

$$Q \cup Q' = R$$

نمایش مجموعه های اعداد روی محور: با توجه به اینکه اعداد حقیقی شامل همه ی اعداد می شود، مجموعه یا بازه های اعداد حقیقی را نیز می توان به راحتی روی محور نمایش داد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۹: مجموعه های زیر را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$A = \{x \in R \mid 2 \leq x < 3\}$$



$$B = \{x \in R \mid -1 < x < 4\}$$

$$C = \{x \in R \mid -5 \leq x \leq -2\}$$

$$D = \{x \in R \mid -3 < x \leq 0\}$$

$$E = \{x \in R \mid 1 \leq x < 5\}$$

$$F = \{x \in R \mid -\infty \leq x < 2\}$$

$$G = \{x \in R \mid 1 \leq x < +\infty\}$$

درس سوم : قدر مطلق و محاسبه تقریبی

به فاصله ی یک عدد روی محور تا مبدأ مختصات ، **قدر مطلق** گفته می شود . مثلاً قدر مطلق عدد a که به شکل $|a|$ نمایش داده می شود یعنی فاصله ی عدد a تا مبدأ مختصات .

نکته : قدر مطلق صفر ، خود صفر ، قدر مطلق اعداد مثبت ، خود عدد و قدر مطلق اعداد منفی ، قرینه عدد است .

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

در مثال مقابل a عددی حقیقی است .

$$\text{مثال } ۱۰ : \quad |-5| = 5 \quad \text{و} \quad |\sqrt{7}| = \sqrt{7} \quad \text{و} \quad \left| \frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5}$$

نکته : قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد ، مساوی حاصل ضرب قدر مطلق ها است .

$$|(-2) \times 10| = |(-2)| \times |10| = 20$$

مثال : نکته ی بالا را برای تقسیم نیز بنویسید و درستی آن را بررسی کنید .

مثال ۱۰ : عبارات سمت چپ را به جمله ی مناسب در سمت راست وصل کنید .

- | | |
|-------------------------------------|-------------------|
| الف) دو عدد a و b مثبت است. | ۱) $a > 0, b < 0$ |
| ب) عدد a نامنفی است. | ۲) $a > 0, b > 0$ |
| ج) دو عدد a و b منفی است. | ۳) $a \geq 0$ |
| د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. | ۴) $a < 0, b < 0$ |
| هـ) عدد a نامثبت است. | ۵) $a \leq 0$ |

مثال ۱۱ : هریک از عبارات سمت راست را به عبارت مناسب در سمت چپ وصل کنید .

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| ۱) $ab < 0$ | الف) $a < 0, b < 0$ |
| ۲) $ab > 0, a + b < 0$ | ب) $a > 0, b > 0$ |
| ۳) $ a + b = a + b$ | ج) $a < 0, b > 0$ |
| ۴) $ a + b = -(a + b)$ | د) $a < 0, b < 0$ |

محاسبات درون قدرمطلق: اگر درون یک قدرمطلق، به جای عدد، یک عبارت ریاضی داشته باشیم، ابتدا حاصل عبارت داخل قدرمطلق را به دست می آوریم و سپس با توجه به مفهوم قدرمطلق، جواب نهایی را می نویسیم.

مثال ۱۲: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

1) $|-2 + (-1)|$

2) $|2 \times 3 - 2 \times 4|$

3) $|-28 \div 4 - 2^3 - 7| - 3| - \sqrt{144} \div (-3) - 2|$

ساده کردن عبارت های قدرمطلق: گاهی اوقات برای محاسبه قدرمطلق لازم است مقدار تقریبی داخل قدر مطلق را تعیین علامت کنیم و با توجه به علامت آن را از قدرمطلق خارج کنیم.

مثال ۱۳: حاصل عبارت $|3^{47} - 4^{48}|$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

مثال ۱۴: حاصل عبارت $|5\sqrt{7} - 7\sqrt{5}|$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

مثال ۱۵: تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید.

دلیل: $\sqrt{2} \approx 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می شود: $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

دلیل: ۱) $|2 - \sqrt{3}| =$

دلیل: ۲) $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| =$

دلیل: ۳) $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}| =$

دلیل: ۴) $|-4 - \sqrt{3}| =$

نکته: برای هر عدد مانند a داریم: $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال ۱۶: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|1-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

ب) $\sqrt{(-2595)^2} =$

ج) $\sqrt{(-3+\sqrt{10})^2} =$

د) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$

نمونه سوالات امتحانی فصل دوم

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
 - (الف) $\sqrt{15}$ عددی گویا است.
 - (ب) مجموعه ی اعداد گویا را می توان با نوشتن عضوها نمایش داد.
 - (ج) $\frac{5}{12}$ بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ قرار دارد.
 - (د) بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد.
 - (هـ) نمایش اعشاری $\frac{2}{5}$ عددی مختوم است.
 - (و) حاصل $\frac{1}{3}$ به صورت اعشار عددی متناوب است.
 - (ز) عدد $\frac{3}{4}$ از عدد $\frac{3}{5}$ کوچک تر است.
 - (ح) از اجتماع دو مجموعه ی Q, Z مجموعه همه ی اعداد حقیقی حاصل می شود.
 - (ط) عدد $\sqrt{1/44}$ عدد گنگ است.
 - (ی) اگر $a < 0$ باشد آنگاه $|a| = -a$
۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.
 - (الف) بین هر دو عدد گویا..... عدد گویا وجود دارد.
 - (ب) مجموعه ی عددهای گویا به زبان نمادین : $\{\frac{a}{b} | \dots\dots\dots\}$
 - (ج) حاصل $1/453$ به صورت کسر مساوی است با
 - (د) عدد $\frac{7}{6}$ به صورت اعشار مساوی است با
 - (هـ) $N \subseteq W \subseteq \dots\dots\dots \subseteq Q \subseteq \dots\dots\dots$
 - (و) اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و اصم را مجموعه اعداد گوئیم.
 - (ز) عدد $\sqrt{29}$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.
 - (ح) عدد $2 + \sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.
 - (ط) عدد $4 + \sqrt{13}$ - بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.
 - (ی) فاصله ی هر نقطه روی محور تا مبدأ را آن عدد می نامیم.
 - (ک) قدر مطلق مجموع دو عدد از مجموع قدر مطلق آن دو عدد یا است.
 - (ل) حاصل عبارت $|-7 - 10 + 4|$ برابر است با

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

الف) کدامیک از کسرهای زیر از $\frac{4}{5}$ بزرگ تر است ؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{9}{10}$ (۴) $\frac{3}{4}$

ب) کدام گزینه از کسرهای زیر مختوم یا متناهی است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

ج) کدامیک از عددهای زیر گنگ (اصم) است؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) $3/14$ (۳) $0.\overline{11}$ (۴) $\sqrt{21+4}$

د) حاصل ضرب دو عدد گنگ :

- (۱) گنگ است (۲) گویاست
(۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد (۴) نه گنگ و نه گویا باشد

هـ) عدد $(-\sqrt{17}-3)$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

- (۱) ۸ و ۷ (۲) ۷ و ۶ (۳) ۲ و ۱ (۴) ۸ و ۷

ز) کدام عبارت زیر درست است؟

- (۱) $R \subseteq Z$ (۲) $\sqrt{16} \notin N$ (۳) $(2 + \sqrt{2}) \in Q$ (۴) $-\sqrt{17} \in R$

ح) عدد $0.2923379....$ به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) W : حسابی (۲) Z : صحیح (۳) Q' : گنگ (۴) Q : گویا

ط) حاصل عبارت $|\sqrt{5}-7+\sqrt{5}|$ برابر است با :

- (۱) -۷ (۲) ۷ (۳) $2\sqrt{5}-7$ (۴) $2\sqrt{5}+7$

۴. بین دو عدد $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ سه کسر پیدا کنید.

۵. کسرهای زیر را باهم مقایسه کنید. (از کوچک به بزرگ مرتب کنید).

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{11}$$

۶. عددهای کسری را به اعشار و اعداد اعشاری را به کسر تبدیل کنید.

الف) $\frac{1}{5}$

ب) $\frac{2}{3}$

ج) $3/157$

د) $2/0.7$

۷. محاسبات زیر را انجام دهید. (برای دانش آموزان علاقمند)

الف) $0.\overline{3} + 0.\overline{7} =$

ب) $0.\overline{315} + 0.\overline{17} =$

ج) $20.\overline{18} + 1.\overline{41} =$

۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{-7 + \frac{1}{2}}{-3 + 8} \div \left(-\frac{5}{6}\right) =$

ب) $\left(-3\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) =$

ج) $\frac{3}{7} + \frac{-2}{5} \times \frac{15}{4} - \left(-\frac{1}{14}\right) =$

۹. در جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ یا $\subseteq$ قرار دهید.

$$\sqrt{3} \bigcirc Q' , 0 \bigcirc W , \sqrt{17} \bigcirc Q , Q \bigcirc R$$

$$Z \bigcirc Q , 0.\overline{11} \bigcirc Q' , 0.\overline{3} \bigcirc R , -\frac{8}{9} \bigcirc N$$

۱۰. بین $\sqrt{15}, \sqrt{17}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

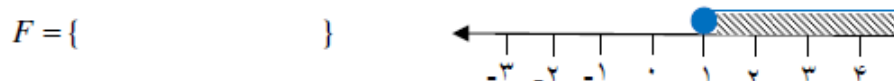
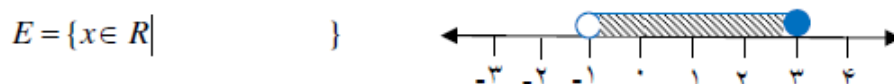
۱۱. بین ۵ و ۶ سه عدد گنگ بنویسید.

۱۲. $\sqrt{17}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

۱۳. مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.



۱۴. با توجه به محور مجموعه ی متناظر آن را بنویسید.



۱۵. مجموعه های سمت چپ را به مجموعه مناسب در سمت راست وصل کنید.

سمت راست	سمت چپ
R	$Z \cap Q$
ϕ	$Q \cup Q'$
Q	$Q \cap Q'$
Z	$R - Q'$
W	$W \cap Z$

۱۶. الف) عدد $-5 + \sqrt{20}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

ب) عدد $5 - \sqrt{50}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۷. الف) بین دو عدد ۶ و ۵ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

ب) بین ۵ و ۶ چند عدد گویا وجود دارد؟ با ذکر مثال.

ج) بین ۵ و ۶ چند عدد گنگ وجود دارد؟ با ذکر مثال.

۱۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $|-8 - 7/5 + 10| =$

ب) $|(-4) \times (+5)| =$

ج) $|7 - 5\sqrt{3}| =$

د) $|3^3 - 27| =$

هـ) $|-\sqrt{45} - \sqrt{20} + 3\sqrt{5}| =$

۱۹. اگر $a = -3$ و $b = -7$ باشد حاصل $|a+b|-|a|$ را به دست آورید.

۲۰. اگر $m = -\frac{2}{3}$ ، $n = \frac{4}{5}$ ، $P = \frac{-3}{10}$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $|6m - 20n + 50p| + 10|P| + 3|m| =$

ب) $\sqrt{(m+p)^2} - \frac{49}{30} =$

۲۱. نتیجه منطقی از عبارات را دریافت کرده و تساوی ها را کامل کنید.

۱) $a > 0 \Rightarrow |a| =$

۲) $a < 0 \Rightarrow |a| =$

۳) $a > 0, b > 0 \Rightarrow |a+b| =$

۴) $a < 0, b < 0 \Rightarrow |a+b| =$

پایان فصل دوم