

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۱ اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل یک هذلولی است.

۲ دو بردار $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)

ب طول بردار $\vec{a} + 2\vec{b}$ را حساب کنید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۳ اگر $A = \begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقدار a برابر است.

۴ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی باهم برابر باشند، آن را یک ماتریس می‌نامیم.

۵ اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در بیضی است.

۶ هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از خواهد گذشت.

۷ سهمی $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است.

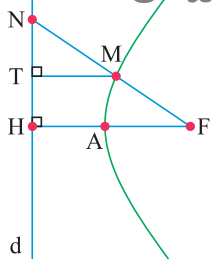
الف مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب نمودار آن را رسم کنید.

۸ در شکل زیر که با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M ، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$$

هندسه 3



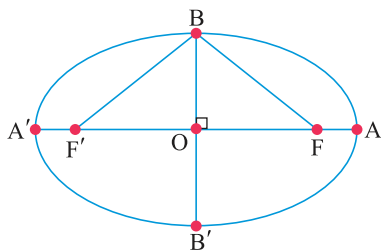
۹ در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید.

۱۰ اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)

۱۱ اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)

۱۲ در شکل زیر اگر $OA = a$, $OB = b$ و $OF = c$ باشد، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2$



۱۳ وضعیت خط $x - y - 1 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۴ اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA = rB$ آن‌گاه داریم: $A = B$.

۱۵ مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه A است.

۱۶ در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

۱۷ نقاط $A = (1, 2, 1)$ و $B = (2, 2, 1)$ و $C = (3, 2, -1)$ را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۱۸ در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ، معادله محور است.

۱۹ ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i=j \\ j & ; i > j \\ 0 & ; i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد:

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.

۲۰ مختصات کانون، رأس و معادله خط هادی سهمی به معادله $y^2 - 6y + 16x + 25 = 0$ را تعیین کنید.

۲۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A|A$ را بیابید.

درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۲۲ در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + by = c' \end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۲۳ مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است، که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

۲۴ هرگاه صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

۲۵ رابطه $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ معادله یک دایره است.

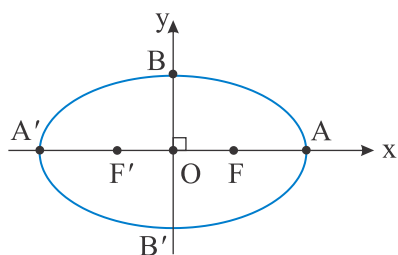
۲۶ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۲۷ ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس A را به دست آورید.

۲۸ دستگاه زیر را با استفاده از A^{-1} حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه A و O برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.

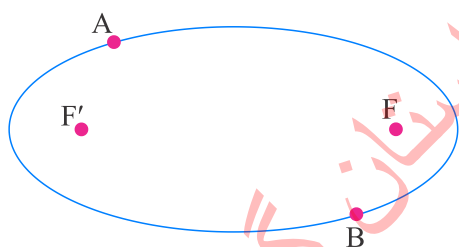
جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را می نامیم.

دایره $C(O, R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.

دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند.



دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس‌های متمایز A ، B و C داشته باشیم، $AB = AC$ ، آنگاه لزوماً $B = C$ است.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط است.

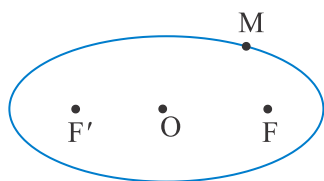
نقطه $(-2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 + 2x = 0$ قرار دارد.

۳۹ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ باشد و با دایره با معادله $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$ مماس داخل باشد.

۴۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = 2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

۴۱ یک دیش مخابراتی به شکل سهمی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است؛ فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

۴۲ در شکل زیر نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$



۴۳ سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

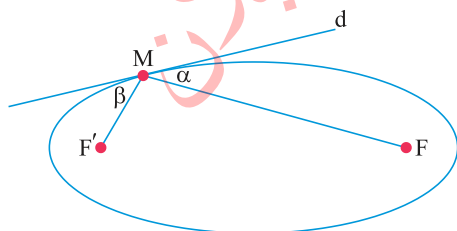
۴۴ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.

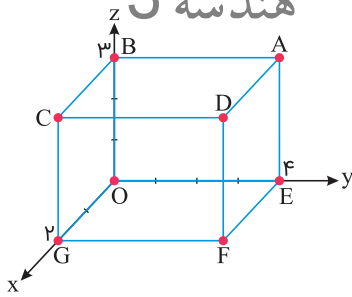
۴۵ اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = 5$ باشد، آنگاه $|2A| = 40$ است.

۴۶ اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

۴۷ در شکل زیر اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد و زاویه $\angle FMF' = 50^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه $\alpha = \beta = 60^\circ$ است.



۴۸ باتوجه به شکل به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف نام وجه از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$$x = 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3$$

ب معادلات مربوط به پاره خط (یال) AD را بنویسید.

پ مختصات نقطه D را بنویسید.

ت معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه XOZ باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.

۴۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس BA را به دست آورید.

۵۰ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$ معادله یک دایره باشد.

موسسه تخصصی زبان گیلان