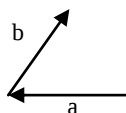


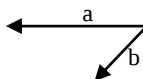
نکته ۱: اگر دو بردار دنبال هم باشند بردار حاصل جمع آنها برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند. با توجه به

تشکیل مثلث این روش را «روش مثلثی» می‌نامند.

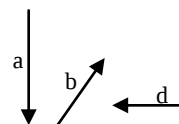
مثال: در شکل‌های زیر بردار $\vec{c}$ حاصل جمع دو بردار را نشان می‌دهد.



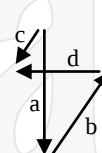
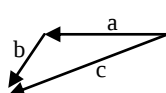
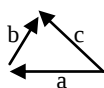
الف)



ب)



پ)



نکته ۲: تساوی برداری یا جمع برداری، یک تساوی جبری (حرفی) است که نشان می‌دهد جمع کدام بردارها با کدام بردار برابر است. به

عنوان مثال در مثال بالا $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ تساوی برداری می‌باشد.

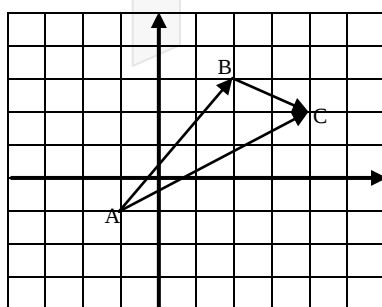
نکته ۳: تساوی بین مجموع مختصات دو بردار و بردار حاصل جمع آنها را «تساوی مختصاتی» یا جمع مختصاتی می‌نامند.

مثال: برای شکل مقابل تساوی برداری و تساوی مختصاتی بنویسید.

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

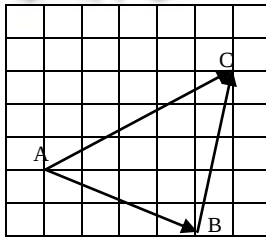
جمع برداری :

$$\text{جمع مختصاتی : } \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$



مثال: برای شکل زیر یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.

پاسخ: چون $\vec{AB}, \vec{BC}$ دنبال هم و $\vec{AC}$ ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل کرده است. بنابراین:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

❖ نکته ۴: برای حل حاصل جمع‌های مختصاتی که در آنها مقدار مجهول وجود دارد باید آنها را به یک معادله تبدیل نمود و حل کرد.

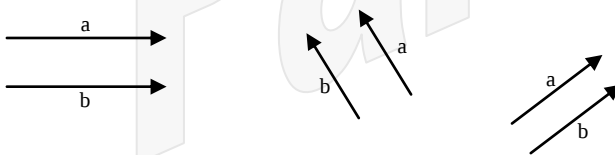
مثال: در تساوی‌های زیر مقدار مجهول را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} x \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}$ حل: $x - 4 = 3$ $x = 3 + 4$ $x = 7$ $-9 + 7 = y$ $-2 = y$	ب) $\begin{bmatrix} -2a \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ b+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ حل: $-2a + 5 = -1$ $-2a = -1 - 5$ $-2a = -6$ $a = \frac{-6}{-2} = 3$ $3 + b + 1 = 0$ $b = -4$	پ) $\begin{bmatrix} 3x - 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 - y \end{bmatrix}$ حل: $3x - 4 = -1$ $3x = -1 + 4$ $3x = 3$ $x = \frac{3}{3} = 1$ $2 = 4 - y$ $y = 4 - 2$ $y = 2$
---	---	---

❖ نکته ۵: اگر دو بردار دارای سه شرط زیر باشند آنها را مساوی می‌نامیم.

۱- هم اندازه باشند. ۲- هم جهت باشند. ۳- موازی باشند.

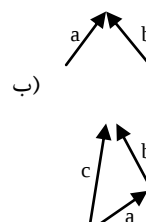
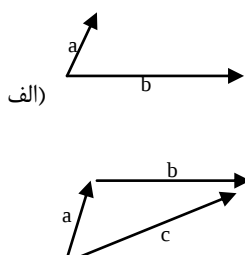
مثال: بردارهای مقابل مساوی هستند.



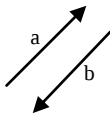
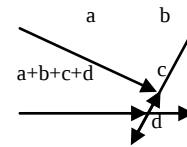
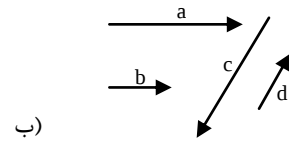
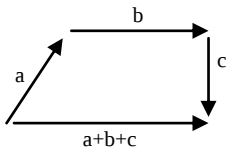
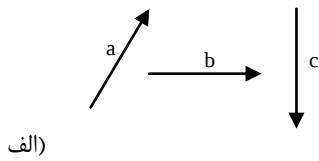
❖ نکته ۶: برای رسم بردار حاصل جمع دو بردار اگر بردارها پی در پی یا دنبال هم نباشند از ابتدای یکی مساوی دیگری را رسم می‌کنیم تا

بردارها به صورت دنبال هم (متوالی) شوند. سپس بردار حاصل جمع را طبق توضیحات قبل رسم می‌کنیم.

مثال: بردار حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



نکته ۷: برای رسم بردار حاصل جمع چند بردار، کافی است مساوی هر کدام را طوری رسم کنیم که بردارها دنبال هم (متوالی) شوند. آنگاه بردار حاصل جمع برداری است که ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل می‌کند.



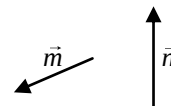
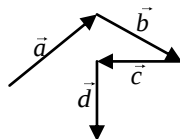
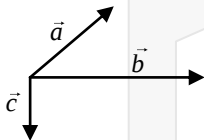
نکته ۸: دو بردار هم اندازه و موازی ولی غیر هم جهت را دو بردار قرینه می‌نامند.

حاصل جمع دو بردار قرینه «بردار صفر» می‌باشد که آن را به صورت $\vec{0}$ نمایش می‌دهند.

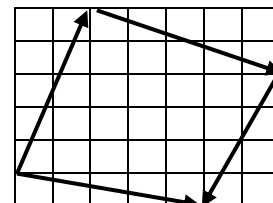
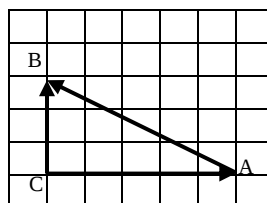
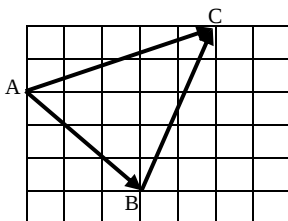
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

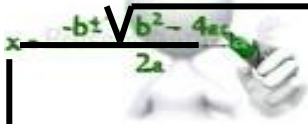
۲-۱-۵- تمرینات کتاب درسی

تمرین ۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



تمرین ۲- در هر شکل یکی از بردارها حاصل جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.





تمرین ۳- در هر تساوی مقدار x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

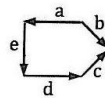
$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

۳-۱-۵- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

☐ الف) مختصات بردار $\vec{0}$ برابر با $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.



☐ ب) در شکل مقابل بردار حاصل جمع، $\vec{e}$ می‌باشد.

☐ پ) جمع دو بردار قرینه، برابر با بردار $\vec{0}$ می‌باشد.

☐ ت) در شکل $\vec{AB}$ بردار حاصل جمع، $\vec{AB}$ می‌باشد.



☐ ث) جمع دو بردار قرینه، برابر با دو برابر یکی از بردارها می‌باشد.

☐ ج) مختصات تمام بردارهایی که مساوی با بردار a هستند با مختصات بردار a برابر است.

☐ چ) برداری که انتقالی را در صفحه نشان ندهد، یعنی ابتدا و انتهای آن یکی باشد، بردار $\vec{0}$ نامیده می‌شود.

☐ ح) در جمع دو برداری که هم مبدأ هستند بردار برآیند بهتر است با روش متوازی‌الاضلاع رسم شود.

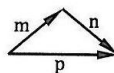
☐ خ) منظور از بردارهای متوالی (پشت سرهم) این است که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق باشد.

☐ د) در جمع برداری به روش متوازی‌الاضلاع بردار برآیند از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر وصل می‌شود.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

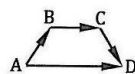
الف) مختصات بردار $\vec{O}$ برابر $\begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$ می‌باشد.

ب) بردار صفر را به صورت نشان می‌دهند.



پ) در شکل مقابل، حاصل جمع، بردار می‌باشد.

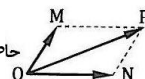
ت) حاصل جمع دو بردار AB و BC بردار می‌باشد.



ث) با توجه به شکل مقابل بردار حاصل جمع، بردار می‌باشد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

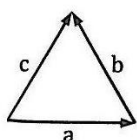
ج) با توجه به شکل حاصل جمع $\vec{OM}$ و $\vec{ON}$ بردار می باشد.



چ) برای رسم بردار برآیند در حالتی که بردارها در مبدأ مشترک باشند، از روش استفاده می کنیم.

ح) بردارهایی که در آن ها ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق باشد را یا پشت سرهم می گویند.

خ) اگر مختصات $\vec{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار CD که با بردار AB مساوی است، برابر با می باشد.



۳- با توجه به شکل، جمع برداری متناظر کدام گزینه است؟

- الف) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ ☐ ب) $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ ☐
ج) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ☐ د) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ☐

۴- در کدام یک از شکل های زیر رابطه $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ درست است؟

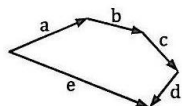
- الف) ☐ ب) ☐ ج) ☐ د) هیچ کدام ☐

۵- حاصل عبارت $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ کدام گزینه است؟

- الف) ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ ب) ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ ج) ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$ د) ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$

۶- کدام جمع برداری صحیح است؟

- الف) ☐ $\vec{d} + \vec{e} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ب) ☐ $\vec{e} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$
ج) ☐ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$ د) ☐ $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{a}$

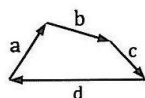


۷- مقدار x و y در تساوی $\begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ y-4 \end{bmatrix}$ برابر با کدام گزینه است؟

- الف) ☐ $\begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$ ب) ☐ $\begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases}$ ج) ☐ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ د) ☐ $\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$

۸- حاصل جمع بردارهای زیر برابر است با:

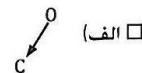
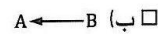
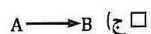
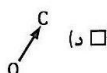
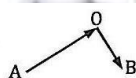
- الف) ☐ $\vec{d}$ ب) ☐ $\vec{b}$
ج) ☐ $\vec{0}$ د) ☐ $\vec{a}$



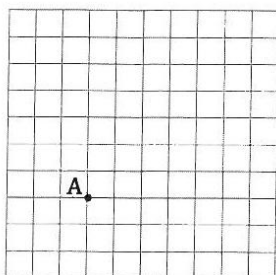
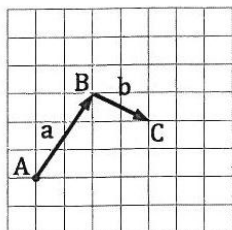
۹- اگر $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$ ، چه رابطه ای بین دو بردار AB و CD برقرار است؟

- الف) دو بردار مساوی اند ☐ ب) دو بردار قرینه اند ☐ ج) دو بردار با هم متقاطع اند ☐ د) گزینه ب و ج ☐

۱۰- برآیند دو بردار AO و OB در شکل مقابل کدام گزینه است؟



۱۱- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل شده است؟ نام آن را بردار c بگذارید. آیا می توان گفت بردار c کار دو بردار انتقال a و b را انجام می دهد؟ به بردار c چه می گویند؟



۱۲- یک روبات فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می کند. در حال حاضر روی نقطه A است.

با فرمان $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ابتدا سه واحد به سمت راست و سپس دو واحد به سمت پایین می رود.

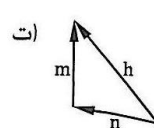
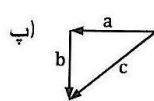
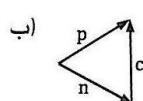
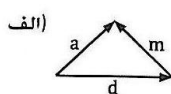
نقطه جدید را B نام گذاری کنید. این روبات با فرمان بعدی $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ به نقطه C می رسد. با

چه دستوری به صورت مستقیم از نقطه A به C می رسد؟

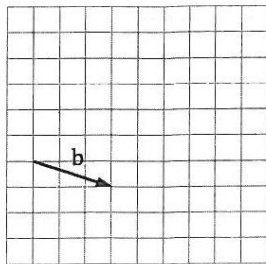
۱۱- اگر مختصات $\vec{AB} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و مختصات $\vec{BC} = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$ و مختصات $\vec{AC} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ باشد حاصل جمع $\vec{AB} + \vec{BC}$ را به صورت یک جمع برداری و

یک جمع مختصاتی بنویسید.

۱۲- برای شکل های زیر یک جمع برداری بنویسید.

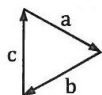


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

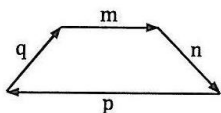


۱۳- پنج بردار مساوی با بردار b را رسم کنید. مختصات تمام بردارها را بنویسید.

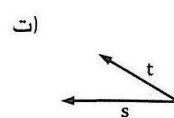
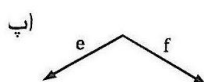
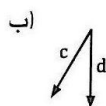
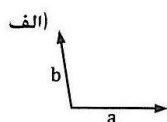
ویژگی‌های بردارهای مساوی (هم‌سنگ) را توضیح دهید.



۱۴- حاصل جمع بردارهای a ، b و c چیست؟ چرا؟

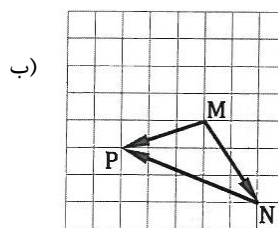
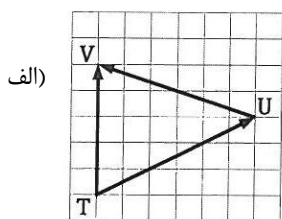


۱۵- حاصل جمع بردارهای m ، n ، p و q چیست؟ چرا؟

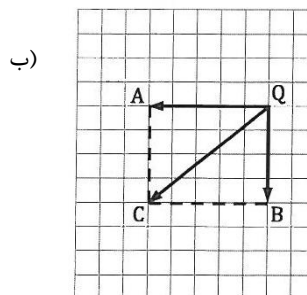
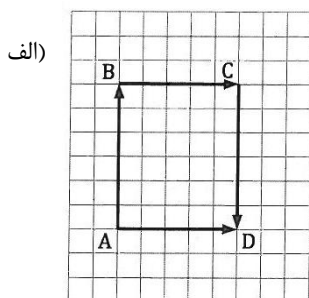


۱۶- ابتدا برآیند بردارهای زیر را رسم نمایید و سپس جمع برداری آن‌ها را بنویسید.

۱۷- برای شکل‌های زیر یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



۱۸- برای شکل‌های زیر یک جمع مختصاتی و یک جمع برداری بنویسید.



۱۹- حاصل جمع‌ها را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ت) $\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ث) $\begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} =$

ج) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$

ع) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} =$

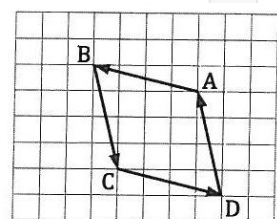
الف) $\begin{bmatrix} 8 \\ y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ 6 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \end{bmatrix}$

۲۰- x و y را در هر تساوی به دست آورید.

$\begin{bmatrix} 4 \\ \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

۲۱- تساوی زیر را کامل کنید.

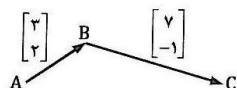


۲۲- با توجه به شکل مقابل:

الف) بردار حاصل جمع بردارها کدام است؟

ب) مختصات بردار BC را کامل کند. $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} +1 \\ \quad \end{bmatrix}$

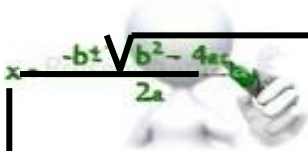
پ) آیا دو بردار BC و DA مساوی‌اند؟ چرا؟



۲۳- الف) باتوجه به شکل، بردار حاصل جمع را رسم کنید.

ب) تساوی متناظر با شکل را کامل کنید.

$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$



۲۰- با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع برای تساوی مقابل شکل مناسب رسم کنید.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

۲۱- m و n را طوری تعیین کنید که $\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ n \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ 5 \end{bmatrix}$ با هم مساوی باشند.

۲۲- اگر دو بردار a و b با هم مساوی باشند، m و n را پیدا کنید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ n+1 \end{bmatrix}$$

۲-۵- ضرب عدد در بردار

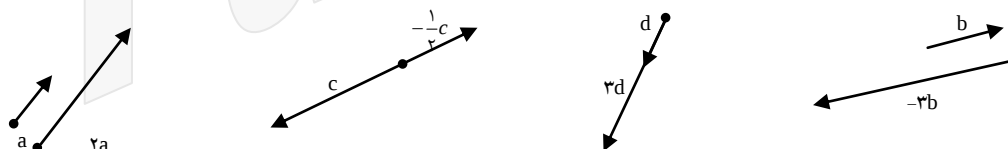
نکته ۱: وقتی برداری را چند برابر می‌کنیم یا در عددی ضرب می‌کنیم بردار حاصل دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱- اندازه بردار حاصل در عدد ضرب شده، ضرب می‌شود.

۲- بردار حاصلضرب، موازی بردار اصلی می‌باشد.

۳- اگر علامت عدد ضرب شده مثبت باشد بردار حاصلضرب هم جهت بردار اصلی و اگر علامت عدد ضرب شده منفی باشد بردار حاصلضرب خلاف جهت بردار اصلی رسم می‌شود.

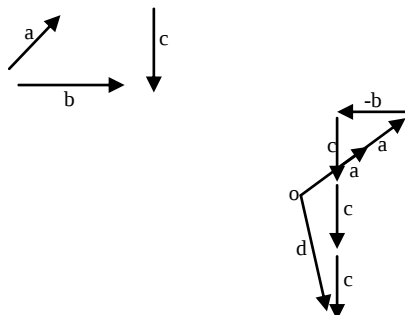
مثال:

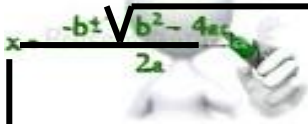


مثال: با توجه به بردارهای a و b و c بردار d را رسم کنید.

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

پاسخ: از نقطه دلخواهی مانند O بردارها را دنبال هم رسم می‌کنیم.





نکته ۲: در ضرب عدد در مختصات بردار، عدد هم در طول و هم در عرض مختصات ضرب می‌شود.

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

مثال: حاصلضربهای زیر را به دست آورید.

الف) $4 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 7 \\ 4 \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -8 \end{bmatrix}$

ب) $-5 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \times (-1) \\ -5 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5 \\ -20 \end{bmatrix}$

پ) $\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \times 8 \\ \frac{3}{4} \times (-20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix}$

ت) $-4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 2 \end{bmatrix}$

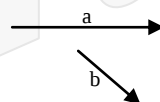
ث) $3 \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -32 \end{bmatrix}$

نکته ۳: اگر بردار $\vec{b}$ قرینه بردار $\vec{a}$ باشد، می‌نویسیم: $\vec{b} = -\vec{a}$ یا $\vec{b} = (-1)\vec{a}$

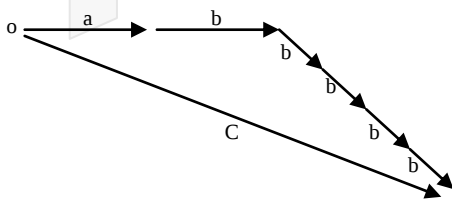
نکته ۴: برای رسم یک بردار به کمک بردارهای دیگر ابتدا از یک نقطه دلخواه بردارهای داده شده را از روی بردار اصلی تشکیل می‌دهیم، سپس به روش متوازی الاضلاع یا مثلثی بردار خواسته شده را رسم می‌کنیم.

مثال: بردارهای a و b مفروض هستند.

بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ را رسم کنید.



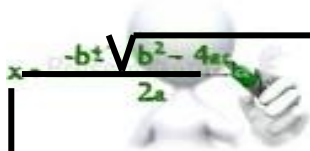
پاسخ: از یک نقطه دلخواه مانند O بردارهای $2\vec{a}$ ، $4\vec{b}$ را رسم می‌کنیم.



نکته ۵: برای محاسبه مختصات یک بردار به کمک بردارهای دیگر ابتدا با ضرب عددها در مختصات‌ها، حاصل آنها را به دست می‌آوریم، سپس مختصات‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم.

مثال: اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند، مختصات $\vec{x} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ را به دست آورید.

$$\vec{x} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 9 \\ 20 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 17 \end{bmatrix}$$



مثال: اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ باشند، مختصات $\vec{p} = -2\vec{a} - 4\vec{b}$ را به دست آورید.

$$\vec{p} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 - 8 \\ -8 - 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -32 \end{bmatrix}$$

نکته ۶: هر معادله برداری یا مختصاتی را مانند معادلات معمولی با مراحل زیر حل می‌کنیم:

- ۱- مرحله اول: مجهولات را در یک طرف تساوی و مختصات‌ها را در طرف دیگر تساوی می‌نویسیم. باید توجه داشت که در جا به جا شدن مختصات‌ها از روی تساوی علامت پشت مختصات را تغییر می‌دهیم.
- ۲- مرحله دوم: حاصل مجهولات و حاصل عددهای معلوم را به دست می‌آوریم.
- ۳- مرحله سوم: طول و عرض مختصات حاصل را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.
- ۴- مرحله چهارم: به کمک حاصل تقسیم‌ها، مختصات مجهول را مشخص می‌کنیم.

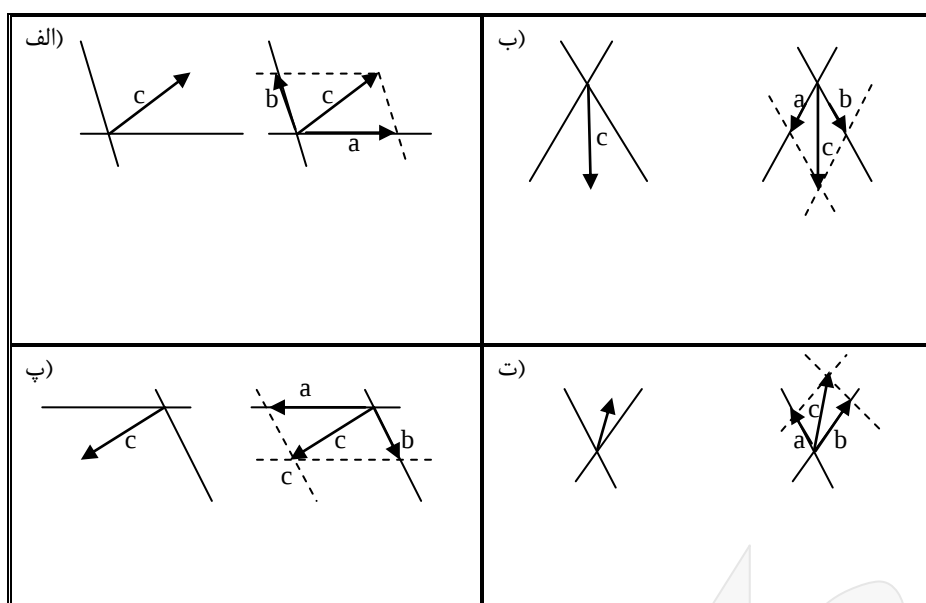
مثال: معادلات برداری زیر را حل کنید.

$1) \quad 3\vec{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ $3\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ $3\vec{x} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ -2+5 \end{bmatrix}$ $3\vec{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ +3 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} (-9) \div 3 \\ (+3) \div 3 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ +1 \end{bmatrix}$	$2) \quad -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\vec{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$ $-4\vec{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $-4\vec{x} = \begin{bmatrix} 9+3 \\ 15+1 \end{bmatrix}$ $-4\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \div (-4) \\ 16 \div (-4) \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$	$3) \quad -2\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $-2\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $-2\vec{x} = \begin{bmatrix} -3+1 \\ 3+5 \end{bmatrix}$ $-2\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} (-2) \div (-2) \\ 8 \div (-2) \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} +1 \\ -4 \end{bmatrix}$
--	---	---

نکته ۷: برای تجزیه هر بردار کافی است از نقطه انتهای بردار موازی امتدادهای داده شده رسم کنیم. هر کجا این خطوط با امتدادها برخورد

کند، انتهای بردارهای تجزیه شده می‌باشد.

مثال: بردارهای داده شده را روی امتدادهای داده شده تجزیه کنید.



۲-۲-۵- تمرینات کتاب درسی:

تمرین ۱- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

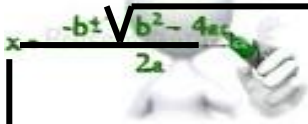
الف) $(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$

ب) $(-4) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$

پ) $\left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$

تمرین ۲- معادلههای مختصات زیر را حل کنید.

$4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$	$-3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$



تمرین ۳- با توجه به بردارهای a و b مختصات بردار c را به دست آورید.

الف) $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} : \vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$

ب) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

پ) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$

۳-۲-۵- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

☐ الف) رابطه $k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ برابر با $\begin{bmatrix} k+x \\ k+y \end{bmatrix}$ می‌باشد. ☐ ب) قرینه $\vec{m} = \begin{bmatrix} -4 \\ +2 \end{bmatrix}$ برابر است با $\vec{m}' = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

☐ پ) رابطه $\vec{x} = +3\vec{y}$ یعنی بردار x سه برابر بردار y می‌باشد. ☐ ت) اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، رابطه $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$ برقرار است.

☐ ث) اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{x} = -2\vec{a}$ باشد، پس $\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌باشد. ☐ ج) در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در عرض بردار ضرب می‌شود.

☐ چ) اگر $\vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 144 \end{bmatrix}, \vec{y} = \frac{1}{12}\vec{b}$ باشد، $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}$ می‌باشد. ☐ ح) اگر $\vec{x} = -\vec{y}$ باشد، می‌گوییم دو بردار x و y با هم همسنگ هستند.

☐ خ) در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد را فقط در طول بردار ضرب می‌کنیم.

☐ د) در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

☐ ذ) بردارهای موازی و هم‌اندازه و هم‌جهت را بردارهای مساوی (همسنگ) می‌گویند.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

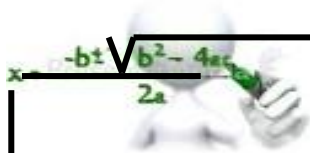
الف) قرینه $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ برابر است با $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$. ب) رابطه $\vec{a} = \frac{1}{p}\vec{b}$ یعنی بردار b برابر بردار a می‌باشد.

پ) رابطه $\frac{1}{m} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به صورت $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ می‌توان نوشت. ت) اگر بردار b قرینه بردار a باشد، می‌نویسیم یا

ث) اگر $\vec{b} = 4\vec{a}, \vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \end{bmatrix}$ باشد، $\vec{b} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ می‌باشد. ج) در معادله $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$ مختصات $\vec{x}$ برابر است با $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

چ) در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در و بردار ضرب می‌شود.

ح) در تجزیه بردارها در محورمختصات هر برداری به دو مؤلفه و تجزیه می‌شود.



۳- حاصل ضرب $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ برابر است با:

- ☐ الف) $\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$
 ☐ ب) $\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}$
 ☐ ج) $\begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$
 ☐ د) $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

۴- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینه رابطه بین بردارهای a و b را نشان می‌دهد؟

- ☐ الف) $\vec{b} = 2\vec{a}$
 ☐ ب) $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$
 ☐ ج) $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$
 ☐ د) $\vec{b} = -2\vec{a}$

۵- اگر دو بردار a و b با هم قرینه باشند، کدام گزینه صحیح است؟

- ☐ الف) $\vec{a} = \vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
 ☐ ب) $\vec{a} = -\vec{b}$
 ☐ ج) $\vec{a} = \frac{1}{b}$
 ☐ د) $\vec{a} = -\frac{1}{b}$

۶- اگر $\vec{n} = \frac{2}{5}\vec{m}$, $\vec{m} = \begin{bmatrix} 15 \\ -25 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات $\vec{n}$ کدام گزینه است؟

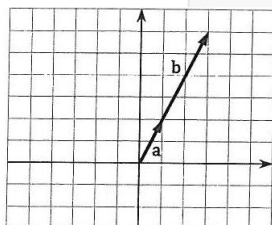
- ☐ الف) $\begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$
 ☐ ب) $\begin{bmatrix} -6 \\ 10 \end{bmatrix}$
 ☐ ج) $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$
 ☐ د) $\begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$

۷- در معادله $3\vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a}$ مختصات $\vec{a}$ برابر است با:

- ☐ الف) $\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$
 ☐ ب) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ☐ ج) $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ☐ د) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

۸- در شکل مقابل مختصات بردارهای a و b را بنویسید. رابطه بین دو بردار a و b

را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

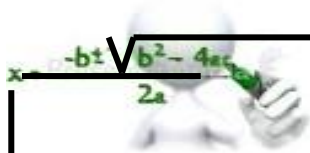


۹- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$(+3) \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} =$	$(+3) \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} =$	$(-3) \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix} =$	$(+5) \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} =$
$(-10) \begin{bmatrix} -27 \\ -32 \end{bmatrix} =$	$(-7) \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix} =$	$(-7) \begin{bmatrix} +40 \\ -21 \end{bmatrix} =$	$(-9) \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} =$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{3}{5} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$
 ب) $-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} =$



پ) ${}^{-6}\bar{x} = \begin{bmatrix} -36 \\ 2 \end{bmatrix}$

ت) $\left(-\frac{2}{7}\right)\begin{bmatrix} 14 \\ 35 \end{bmatrix} - \left(-\frac{3}{2}\right)\begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ث) ${}^{-2}\bar{x} = \begin{bmatrix} -4+ \\ -6+ \end{bmatrix}$

ج) $4\begin{bmatrix} 9+ \\ 3+ \end{bmatrix} - 1\bar{x} = 6\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} 25 \\ 3 \end{bmatrix} - \bar{x} = \begin{bmatrix} -17 \\ +14 \end{bmatrix}$

ر) $\begin{bmatrix} -42 \\ -84 \end{bmatrix} + \bar{m} = \begin{bmatrix} -31 \\ 5 \end{bmatrix}$

۱۱- با توجه به بردارهای a و b مختصات بردار c را به دست آورید.

الف) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\bar{z} = 6\bar{a} - 5\bar{b} \Rightarrow \bar{z} = 6\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ب) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\bar{z} = 6\bar{a} - 5\bar{b} \Rightarrow \bar{z} = 6\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

پ) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ + \end{bmatrix}$ و $\bar{b} = \begin{bmatrix} + \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\bar{c} = -2\bar{a} + \bar{b}$

ت) $z = -\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b$

ث) $\bar{z} = +/1\bar{a} + +/4\bar{b}$

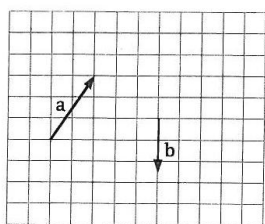
۱۲- با توجه به بردارهای a و b مختصات بردار c را به دست آورید.

الف) $\bar{a} = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $\bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\bar{c} = 8\bar{a} + 2\bar{b} \Rightarrow \bar{c} =$

ب) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\bar{z} = 6\bar{a} - 5\bar{b} \Rightarrow \bar{z} = 6\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

پ) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ + \end{bmatrix}$ و $\bar{b} = \begin{bmatrix} + \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\bar{c} = -2\bar{a} + \bar{b}$

۱۳- با توجه به بردار a و b ، بردارهای c را رسم کنید.

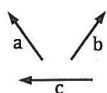


الف) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

ب) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

پ) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

۱۴- با توجه به بردار a ، b و c ، بردار d را رسم کنید.

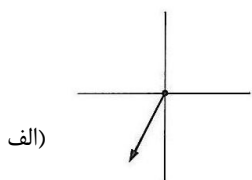


۱) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

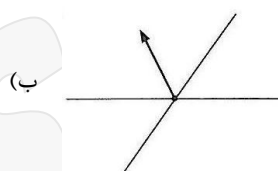
۲) $\vec{d} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$

۳) $\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

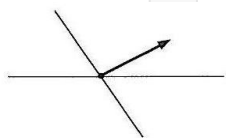
۱۵- بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده، تجزیه کنید.



(الف)



(ب)



(ث)



(پ)

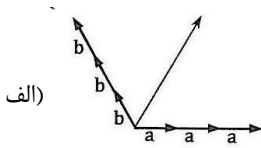
۱۶- با توجه به اطلاعات مسئله، مختصات بردار $\vec{x}$ را به دست آورید.

الف) $\vec{a} = 2\vec{b}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{x} = 4\vec{a} + \vec{b}$

ب) $\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{a}$ و $\vec{a} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$ و $\vec{x} = 4\vec{a} + 7\vec{b}$

پ) $\vec{b} = -5\vec{a}$ و $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\vec{x} = 3\vec{a} + 10\vec{b}$

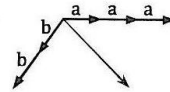
۱۷- در شکل‌های زیر یک تساوی جمع برداری بنویسید.



(الف)

$$\vec{c} = \dots + \dots$$

(ب)



$$\vec{c} = \dots + \dots$$

۱۸- در تساوی مقابل به جای $\square$ عددهای مناسب بنویسید.

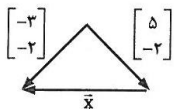
$$(-3) \begin{bmatrix} \square \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \square \end{bmatrix}$$

۱۹- با توجه به این که $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌باشند، مختصات هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.

(الف) $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$

(ب) $\vec{y} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

۲۰- مختصات بردار $\vec{x}$ را بنویسید.



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$$

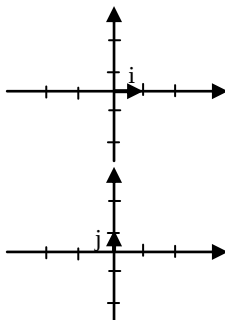
۲۱- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ و بردار $\vec{b}$ دو برابر قرینه $\vec{a}$ باشد، مختصات $\vec{x}$ را به دست آورید.

۳-۵- بردارهای واحد مختصات

۱-۳-۵- نکات درسی:

نکته ۱: برای اندازه‌گیری هر کمیت یا مقداری یک واحد تعریف می‌شود. برای اندازه‌گیری بردارها نیز دو واحد تعریف شده است که یکی طول

برداری و دیگری عرض بردار را اندازه‌گیری می‌کند.



نکته ۲: بردار $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را بردار واحد محور طول‌ها می‌نامند.

نکته ۳: بردار $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بردار واحد محور عرض‌ها می‌نامند.

نکته ۴: برای تبدیل مختصات یک بردار به بردارهای واحد کافی است عدد طول را ضرب $\vec{i}$ و عدد عرض را ضرب $\vec{j}$ قرار دهیم.

مثال: بردارهای زیر را بر حسب بردارهای واحد مختصات $(\vec{j}, \vec{i})$ بنویسید.

الف) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{j} + \vec{i}$

ب) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} = 5\vec{i} - 9\vec{j}$

د) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1\vec{i} + 0\vec{j} = -\vec{i}$

مثال: مختصات بردارهای داده شده را بنویسید.

الف) $5\vec{i} - 9\vec{j} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$

ج) $\vec{i} + 7\vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

ب) $\vec{i} - 10\vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$

د) $12\vec{i} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$

نکته ۵: در محاسبات مختصاتی بهتر است بردارهای واحد را به مختصات تبدیل کرده سپس محاسبه را ادامه می‌دهیم.

مثال: معادله‌های برداری زیر را حل کنید.

الف) $5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ حل: $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ $-3\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $-3\vec{x} = \begin{bmatrix} -4-5 \\ 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} (-9) \div (-3) \\ 3 \div (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	ب) $\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} - 3\vec{x} = -3\vec{i} - \vec{j}$ حل: $\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} - 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $-3\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$ $-3\vec{x} = \begin{bmatrix} -3-9 \\ -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ +3 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} (-12) \div (-3) \\ 3 \div (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4 \\ -1 \end{bmatrix}$
---	---

مثال: اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ، $\vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j}$ باشند، مختصات $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا باید مختصات بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ را به دست آوریم و سپس آنها را در بردار $\vec{p}$ جایگذاری کنیم.

$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+3 \\ -4+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{p} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\vec{x}$ را در معادله زیر به دست آورید.

$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

حل: ابتدا مختصات بردار a را به دست می آوریم که برابر می شود با $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. از طرفی می دانیم که بردار $\vec{j}$ بردار واحد محور عرض ها می باشد

و برابر است با $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. اکنون با جایگذاری $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ در معادله خواهیم داشت:

$$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

$$2\vec{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

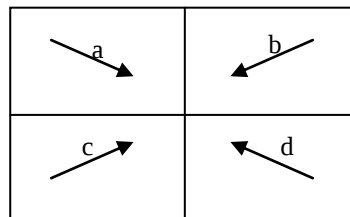
$$2\vec{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1+0 \\ -6-2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \div 2 \\ -7 \div 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -3.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

نکته ۶: می توان بدون داشتن عددهای هر مختصات و فقط به وسیله علامت آنها، هر بردار را شناسایی کرد.

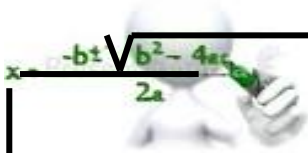
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$$



$$\vec{c} = \begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}$$

تذکر: حرکت اول افقی و حرکت دوم عمودی می باشد. مثلاً برای بردار d داریم:

$$d = \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \nearrow (+) \\ \searrow (-) \end{array}$$



۳-۳-۵- تمرینات کتاب درسی:

تمرین ۱- معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

الف) $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$

تمرین ۲- اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ، $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ را بدست آورید.

الف) $\vec{x} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$

ب) $\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$

تمرین ۳- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، بردار $\vec{x}$ را از معادله زیر پیدا کنید.

$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$

۳-۳-۵- سؤالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» نشان دهید.

☐ الف) مختصات بردار $\vec{x} = 7\vec{i}$ برابر است با $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ ب) بردار $\vec{i}$ ، بردار واحد مختصات محور طول‌ها است.

☐ پ) بردار $\vec{j}$ ، بردار واحد مختصات محور طول‌ها است.

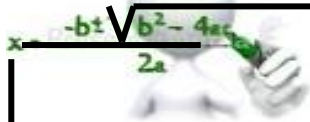
☐ ت) مختصات بردار $\vec{a} = -2\vec{j}$ برابر است با $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ ث) مختصات بردار $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

☐ ج) بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را بردار واحد مختصات محور طول‌ها می‌گویند.

☐ چ) بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ را بردار واحد مختصات محور عرض‌ها می‌گویند.

☐ ح) در معادله مختصاتی $3\vec{i} + 3\vec{x} = 6\vec{j} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ مختصات $\vec{x}$ برابر با $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌باشد.



□ (خ) اگر $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\vec{x} + \vec{y}$ به صورت بردارهای واحد مختصات $2i + 2j$ می‌باشد.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) اگر $\vec{x} = 5i$ باشد، آن گاه $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$.

ب) اگر $b = -3j$ باشد، آن گاه $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ می‌باشد.

پ) بردار $\vec{z}$ بردار واحد مختصات محور است.

ت) بردار $\vec{z}$ بردار واحد مختصات محور است.

ث) مختصات بردار $\vec{i}$ برابر با و مختصات بردار $\vec{j}$ برابر با می‌باشد.

ج) اگر $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات آن بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌باشد.

چ) اگر $\vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات آن بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌باشد.

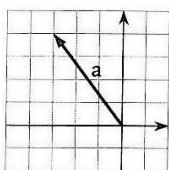
ح) اگر بردارهای $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\vec{x} + \vec{y}$ بر حسب بردارهای واحد می‌باشد.

۳- مختصات $\vec{a} = i + 2j$ برابر است با:

الف) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ □ ب) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ □ ج) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ □ د) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ □

۴- با توجه به معادله $3\vec{x} = 6i - 3j$ مختصات بردار $\vec{x}$ برابر است با:

الف) $\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ □ ب) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ □ ج) $\begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}$ □ د) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ □



۵- بردار $\vec{a}$ بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برابر با کدام گزینه است؟

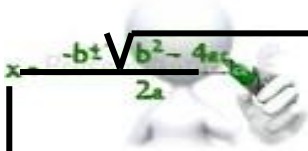
الف) $\vec{a} = 4i + 4j$ □ ب) $\vec{a} = 3i + 4j$ □
ج) $\vec{a} = -3i + 4j$ □ د) $\vec{a} = -6i + 9j$ □

۶- مختصات بردار $\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ به صورت بردارهای واحد مختصات برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\vec{x} = 9i - 6j$ □ ب) $\vec{x} = -6j + 9i$ □ ج) $\vec{x} = -6i - 9j$ □ د) $\vec{x} = -6 + 9j$ □

۷- اگر $\vec{a} = 3i - 5j$, $\vec{b} = 3i + 5j$ باشد، مختصات بردار $\vec{x} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$ برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ □ ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}$ □ ج) $\begin{bmatrix} 12 \\ -10 \end{bmatrix}$ □ د) $\begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix}$ □



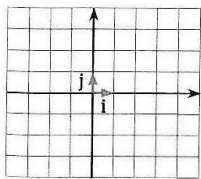
۸- اگر $\vec{m} = 5\vec{i}$ باشد، مختصات بردار m کدام گزینه است؟

- ☐ الف) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$
 ☐ ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$
 ☐ ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
 ☐ د) گزینه‌های ب و ج

۹- اگر $\vec{a} = -7\vec{j}$ ، $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای a و b کدام است؟

- ☐ الف) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$
 ☐ ب) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
 ☐ ج) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$
 ☐ د) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

۱۰- در شکل زیر بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده است.



الف) مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$ ، $\vec{j} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ب) بردار $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

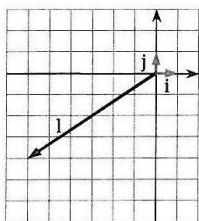
پ) مختصات بردار a را بنویسید.

ت) مختصات بردار a را از رابطه مقابل به دست آورید.

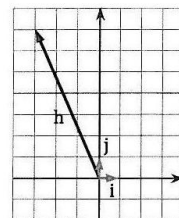
$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} = 3 \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} =$$

۱۱- در هر قسمت بردار داده شده را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و یک بار هم به صورت مختصاتی بنویسید.

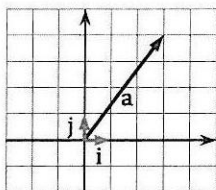
الف)



ب)



پ)



۱۲- بردارهای زیر را بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بیان کنید.

الف) $\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} =$

ب) $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} =$

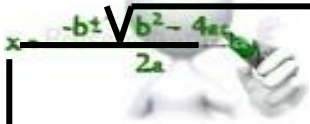
پ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$

ت) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

ج) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$

چ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} =$

د) $\begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} =$



۱۳- مختصات بردارها را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

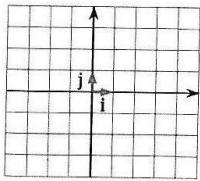
ب) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

پ) $\vec{n} = -4 + 3\vec{j}$

ت) $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j}$

ث) $\vec{f} = -\vec{i} - \vec{j}$

ج) $\vec{p} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$



$\vec{m} = -3\vec{i} - 4\vec{j} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

۱۴- در شکل زیر بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند.

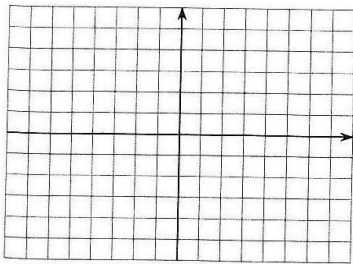
الف) مختصات بردارهای واحد را بنویسید.

ب) بردار $\vec{m} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ رسم کنید.

پ) مختصات بردار $\vec{m} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ را بنویسید.

ت) مختصات بردار $\vec{m}$ را از رابطه زیر به دست آورید.

۱۵- بردارهای زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.



الف) $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$

ب) $\vec{b} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$

پ) $\vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$

۱۶- مانند نمونه طرف دیگر تساوی را کامل کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

ب) $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} =$

پ) $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} =$

ت) $\begin{bmatrix} 0 \\ 18 \end{bmatrix} =$

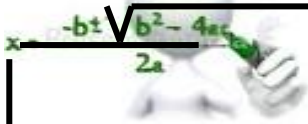
ث) $\begin{bmatrix} -3/5 \\ 7/5 \end{bmatrix} =$

۱۷- معادله‌های برداری زیر را به دو روش حل کنید.

الف) $-3\vec{i} + 10\vec{j} + \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

ب) $4\vec{i} - 2\vec{x} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

پ) $6\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 42 \end{bmatrix}$



۱۸- معادله‌های برداری زیر را به روش دلخواه حل کنید.

الف) $\vec{x} + 1j - 2i = 2i + 2j$

ب) $-4i + 3j - 3j - 2i = \vec{x}$

پ) $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \vec{x} = 4\vec{i}$

ت) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \vec{x} = -4i + 7j$

ث) $-6i + 4j + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

ج) $-3\vec{x} = -12j + 6i$

۱۹- اگر $\vec{a} = 5i - 4j$ ، $\vec{b} = 2i + 3j$ باشد، مختصات بردارهای زیر را به دست آورید.

الف) $\vec{h} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$

ب) $\vec{y} = -(10\vec{a} + 20\vec{b})$

۲۰- اگر $\vec{a} = 2i + 4j$ ، $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $\vec{x}$ را به دست آورید.

الف) $3\vec{a} + 6\vec{b} = 2\vec{x}$

ب) $6\vec{a} - 9\vec{b} = 3\vec{x}$

۲۱- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشد، از معادله زیر بردار $\vec{x}$ را پیدا کنید.

$3\vec{x} - i + 2j = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

۲۲- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

الف)

طول +		-		+		-	
عرض +		+		-		-	

ب)

طول +		-		-		+	
عرض -		-		+		+	

پ)

طول +		-	
عرض -		+	

ت)

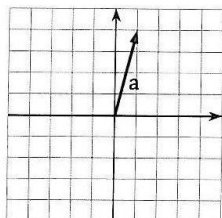
طول -		+		-		+	
عرض -		+		+		-	

۲۳- اگر بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد:

الف) دو بردار را از مبدأ رسم کرده و سپس بردار حاصل جمع را رسم کنید.

ب) جمع متناظر با بردار حاصل جمع را بنویسید.

۲۴- با توجه به شکل مقابل:



الف) مختصات بردار $\vec{a}$ را بنویسید.
 $\vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

ب) بردار $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$ را از مبدأ رسم کنید.

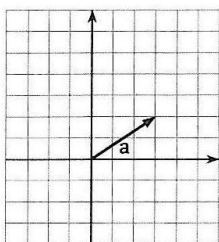
پ) بردار $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ را روی شکل نشان دهید و مختصات آن را بنویسید.
 $\vec{c} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

۲۵- اگر $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ و $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای زیر را به دست آورید.

الف) $\vec{h} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$

ب) $\vec{y} = -(1\vec{a} + 2\vec{b})$

۲۶- اگر $\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، ابتدا مختصات بردار $\vec{a}$ و سپس مختصات بردار $\vec{x} = -2\vec{b} + \vec{a}$ را به دست آورید.



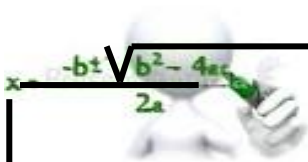
۲۷- الف) با توجه به شکل مقابل از مبدأ مختصات بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ را رسم کرده و

سپس بردار حاصل جمع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نیز رسم کنید.

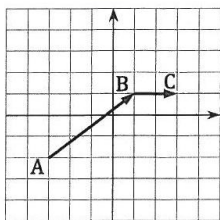
ب) بردار $\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ را بر حسب بردارهای واحد مختصات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

۲۸- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مختصات بردار $\vec{x}$ را به دست آورید.

$\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$



۲۹- دوچرخه سواری در یک مسیر مستقیم از نقطه A شروع به حرکت کرده و به نقطه B می‌رسد



۳۰- اگر $\vec{a} = 6\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$, $\vec{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ باشد، ابتدا مختصات a و b را بنویسید. سپس مختصات $\vec{x}$ را به دست آورید.

$$\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} - 4\vec{b}$$

۵۹- مختصات بردارهای a و b را در هر یک از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $\vec{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\vec{b} = 2\vec{a}$

ب) $\vec{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\vec{b} = -\vec{a}$

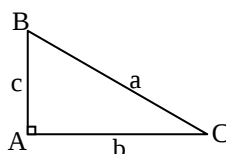
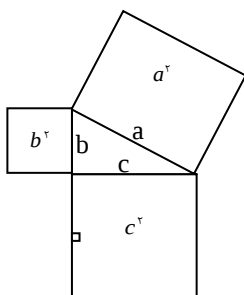
@riazicafe

۱-۶- رابطه فیثاغورس

۱-۱-۶ نکات درسی:

نکته ۱: فیثاغورس «دانشمند یونانی» به اندازه‌گیری مساحت مربع‌هایی که روی ضلع‌های هر مثلث قائم الزاویه تشکیل می‌شود به رابطه زیر

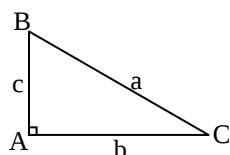
دست پیدا کرد.



$$\Delta ABC \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{قائم الزاویه}$$

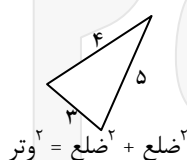
نکته ۲: عکس رابطه فیثاغورس نیز همواره صحیح است. یعنی اگر در مثلثی مجذور (مربع یا توان دوم) بزرگ‌ترین ضلع (وتر) با مجموع

مجذورهای دو ضلع دیگر مساوی باشد، آن مثلث قائم الزاویه می‌باشد.



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC \quad \text{قائم الزاویه}$$

مثال: کدام یک از شکل‌های زیر قائم الزاویه هستند؟



$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 16 + 9$$

$$25 = 25$$

مثلث قائم الزاویه است.



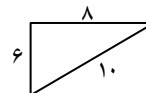
$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$9^2 = 5^2 + 7^2$$

$$81 = 49 + 25$$

$$81 \neq 74$$

مثلث قائم الزاویه نیست.



$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$10^2 = 6^2 + 8^2$$

$$100 = 64 + 36$$

$$100 = 100$$

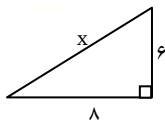
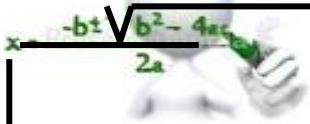
مثلث قائم الزاویه است

نکته ۳: یکی از کاربردهای رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه این می‌باشد که در هر مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع (گاهی

اوقات حتی یک ضلع) به وسیله رابطه فیثاغورس می‌توان اندازه ضلع سوم را محاسبه کرد.

برای انجام این کار بهتر است مجهول‌ها را به دو دسته زیر تقسیم بندی کنیم:

الف) وتر مجهول باشد: در این حالت طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم: (ضلع مجهول را x در نظر می‌گیریم)



$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

۱- رابطه فیثاغورس را به کمک اندازه ضلع‌ها می‌نویسیم.

۲- عددها را به توان ۲ می‌رسانیم.

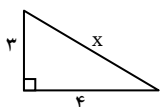
۳- عددهای به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم.

۴- از دو طرف تساوی جذر می‌گیریم. ($\sqrt{x^2} = x$)

۵- اندازه وتر مجهول به دست می‌آید.

نکته ۴: توجه داشته باشیم اگر توان دوم وتر مجذور کامل نبود، در صورت نیاز تا جذر یک رقم اعشار یا دو رقم اعشار محاسبه می‌کنیم.

مثال: در شکل‌های زیر مقدار مجهول را به دست آورید.



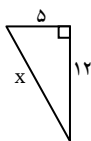
$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 16 + 9$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25} = 5$$



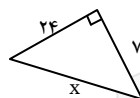
$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 12^2 + 5^2$$

$$x^2 = 144 + 25$$

$$x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169} = 13$$



$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 24^2 + 7^2$$

$$x^2 = 576 + 49$$

$$x^2 = 625$$

$$x = \sqrt{625} = 25$$

$$(\sqrt{10})^2 = 10$$

نکته ۵: اگر جذر هر عدد را به توان دو برسانیم خود عدد حاصل می‌شود:

مثال: در شکل‌های زیر مقدار مجهول x را به دست آورید.

$$a^2 = 3^2 + 1^2 \rightarrow a^2 = 10 \quad \text{مثلث اول}$$

$$a^2 = 9 + 1$$

$$a^2 = 10$$

$$a = \sqrt{10}$$

$$b^2 = (\sqrt{10})^2 + 1^2 \rightarrow b^2 = 11 \quad \text{مثلث دوم}$$

$$b^2 = 10 + 1$$

$$b^2 = 11$$

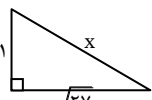
$$b = \sqrt{11}$$

$$x^2 = (\sqrt{11})^2 + 1^2 \rightarrow x^2 = 12 \quad \text{مثلث سوم}$$

$$x^2 = 11 + 1$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{12} \approx 3.5$$



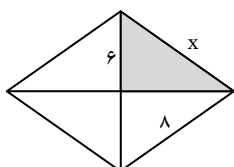
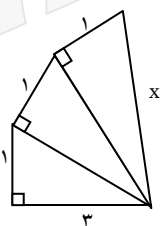
$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 3^2 + (\sqrt{27})^2$$

$$x^2 = 9 + 27$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

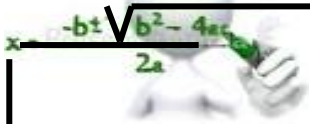


مثال: اندازه قطرهای یک لوزی ۱۲ و ۱۶ سانتی‌متر هستند. اندازه ضلع لوزی را به دست آورید.

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x = \sqrt{100} = 10$$

$$x^2 = 64 + 36 = 100$$



مثال: در شکل زیر مقدار مجهول را به دست آورید.

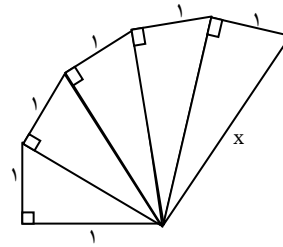
$$(a = \text{وتر مثلث اول}) \Rightarrow a^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$(b = \text{وتر مثلث دوم}) \Rightarrow b^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$(c = \text{وتر مثلث سوم}) \Rightarrow c^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$(d = \text{وتر مثلث چهارم}) \Rightarrow d^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow d = \sqrt{5}$$

$$(x = \text{وتر مثلث پنجم}) \Rightarrow x^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = 5 + 1 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$



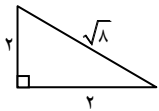
نکته ۶: گاهی اوقات مقادیری زیر رادیکال به ما داده می‌شود و از ما می‌خواهند پاره خطهایی به اندازه داده شده رسم کنیم. که در اینصورت

ما می‌باید مجذوراتی را پیدا کنیم که از جمع آن مجذورات عدد زیر رادیکال حاصل شود.

مثال: پاره خطهایی به اندازه‌های داده شده رسم کنید.

الف) $\sqrt{8}$

حل: $8 = 4 + 4 = 2^2 + 2^2$



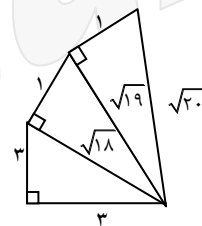
ب) $\sqrt{13}$

حل: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$



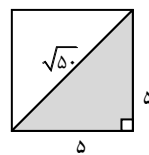
ج) $\sqrt{20}$

حل: $20 = 9 + 9 = 3^2 + 3^2$



مثال: فائزه می‌خواهد اندازه ضلع‌های مربعی را بدست آورد که قطر آن $\sqrt{50}$ باشد. او را راهنمایی کنید.

راه اول: $50 = 25 + 25 = 5^2 + 5^2$



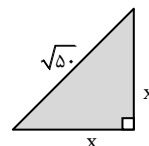
راه دوم: $\text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2 = \text{وتر}^2$

$$(\sqrt{50})^2 = x^2 + x^2$$

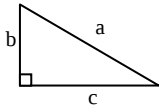
$$50 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{50}{2} = 25$$

$$25 = x^2$$

$$5 = x$$



ب) یکی از ضلع‌های زاویه قائمه مجهول باشد، که در این حالت با نوشتن رابطه فیثاغورس و انتقال مجهول به یک طرف تساوی و معلوم‌ها به طرف دیگر تساوی، رابطه فیثاغورس به شکل‌های زیر تبدیل می‌شود:



$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{یا} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

بنابراین در این حالت طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

۱- رابطه فیثاغورس را به صورت: (ضلع - وتر = ضلع) می‌نویسیم.

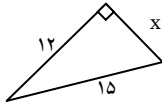
۲- عددها را به توان ۲ می‌رسانیم.

۳- عددهای به دست آمده را از هم کم می‌کنیم.

۴- از دو طرف تساوی جذر می‌گیریم.

۵- اندازه ضلع مجهول به دست می‌آید.

مثال: در شکل‌های زیر مقدار مجهول را به دست آورید.

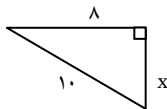


$$\text{ضلع}^2 - \text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 15^2 + 12^2$$

$$x^2 = 225 + 144 = 369$$

$$x = \sqrt{369} = 19$$

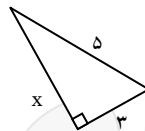


$$\text{ضلع}^2 - \text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 10^2 - 8^2$$

$$x^2 = 100 - 64 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

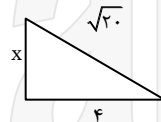


$$\text{ضلع}^2 - \text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = 5^2 - 3^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4$$



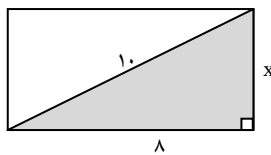
$$\text{ضلع}^2 - \text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2$$

$$x^2 = (\sqrt{20})^2 - 4^2$$

$$x^2 = 20 - 16 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = 2$$

مثال: طول مستطیلی ۸ سانتی‌متر و قطر آن ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد. عرض مستطیل را بدست آورید.



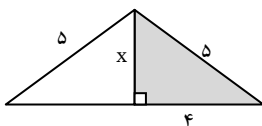
$$\text{ضلع}^2 - \text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 - 8^2$$

$$x^2 = 100 - 64 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

مثال: ساق‌های مثلث متساوی الساقینی ۵ سانتی‌متر و قاعده آن ۸ سانتی‌متر می‌باشد. طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث را بدست آورید.

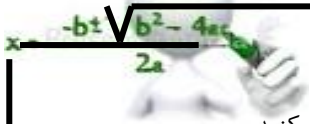
توجه داشته باشید که در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، عمود منصف است.



$$\text{ضلع}^2 - \text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 \Rightarrow x^2 = 5^2 - 4^2$$

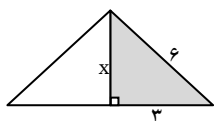
$$x^2 = 25 - 16 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3$$



مثال: غلام رضا می خواهد اندازه ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ سانتی متر را به دست آورد. او را راهنمایی کنید.

در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع، عمود منصف ضلع مقابل است.



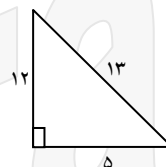
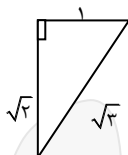
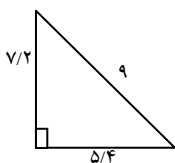
$$6^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 - 3^2$$

$$x^2 = 36 - 9 = 27$$

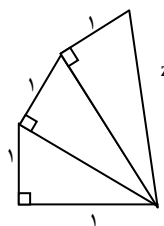
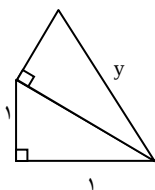
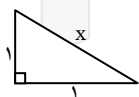
$$x = \sqrt{27} = 5\frac{1}{2}$$

تمرین ۱-۲-۶- تمرینات کتاب درسی:

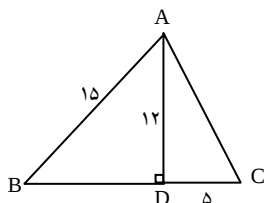
تمرین ۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلثهای قائمه الزاویه زیر بررسی کنید.



تمرین ۲- به ترتیب طول x, y, z را به دست آورید.

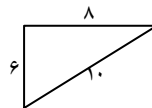
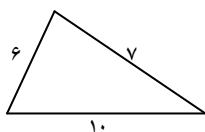


تمرین ۳- محیط مثلث ABC را حساب کنید.



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

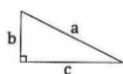
تمرین ۴- کدام مثلث قائم الزاویه است؟



۳-۱-۶- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

☐ الف) اعداد ۱۲ و ۵ و ۱۳ اعداد فیثاغورسی هستند.



☐ ب) در شکل مقابل، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ وجود دارد.

☐ پ) رابطه فیثاغورس برای تمامی مثلث‌ها درست است.

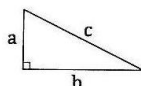
☐ ت) اگر دو ضلع قائمه یک مثلث ۶ و ۸ سانتی‌متر باشد، وتر آن ۱۴ می‌شود.

☐ ث) رابطه فیثاغورس برای مثلث قائم الزاویه متساوی الساقیت برقرار نیست.

☐ ج) با داشتن طول و قطر مستطیل، می‌توانیم عرض آن را با رابطه فیثاغورس به دست آوریم.

☐ چ) اگر در یک مثلث، مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، مثلث قائم الزاویه است.

☐ ح) در هر مثلث قائم الزاویه مساحت مربعی که با وتر ساخته می‌شود با مجموع مساحت دو مربعی که با اضلاع قائمه ساخته می‌شود، برابر است.



۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) با توجه به شکل مقابل رابطه برقرار است.

ب) رابطه فیثاغورس برای مثلث‌های برقرار است.

پ) اگر طول و عرض مستطیلی ۱۲ و ۵ سانتی‌متر باشد، قطر آن می‌باشد.

ت) اگر دو ضلع قائمه یک مثلث ۸ و ۶ سانتی‌متر باشد، وتر آن برابر است.

ث) در هر مثلث قائم الزاویه مربع برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع

ج) ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر تا یک رقم اعشار برابر می‌باشد.

چ) اگر وتر یک مثلث ۱۵ و یک ضلع قائمه آن ۱۲ سانتی‌متر باشد، ضلع دیگر قائمه آن می‌باشد.

ح) اگر در یک مثلث مجذور ضلع بزرگ‌تر با مجموع مجذور دو ضلع دیگر برابر باشد، مثلث است.

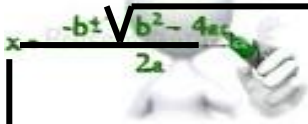
۳- کدام دسته از اعداد زیر اعداد فیثاغورسی هستند؟

☐ د) ۱۲ و ۱۳ و ۱۷

☐ ج) ۹ و ۱۲ و ۱۵

☐ ب) ۱۰ و ۱۲ و ۱۵

☐ الف) ۷ و ۸ و ۹



۴- اگر مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ سانتی متر رسم کنیم، اندازه یکی از زاویه‌های آن حتماً کدام گزینه خواهد بود؟

- ☐ الف) 60° ☐ ب) 90° ☐ ج) 120° ☐ د) 45°

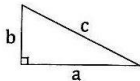
۵- در کدام نوع مثلث زیر رابطه فیثاغورس برقرار است؟

- ☐ الف) متساوی‌الاضلاع ☐ ب) متساوی‌الساقین ☐ ج) قائم‌الزاویه ☐ د) مختلف‌الاضلاع

۶- اگر اضلاع قائمه یک مثلث ۶ و ۸ سانتی متر باشد، وتر آن برابر است با:

- ☐ الف) ۱۴ cm ☐ ب) ۱۰ cm ☐ ج) ۱۲ cm ☐ د) ۱۵ cm

۷- در شکل مقابل کدام رابطه برقرار است؟



- ☐ الف) $c^2 = a^2 + b^2$ ☐ ب) $b^2 = a^2 + c^2$
☐ ج) $a^2 = b^2 + c^2$ ☐ د) $2c = 2a + 2b$

۸- قطر مربعی به ضلع ۱۰ سانتی متر تا یک رقم اعشار کدام گزینه است؟

- ☐ الف) $13/9$ ☐ ب) $14/1$ ☐ ج) $14/2$ ☐ د) $14/3$

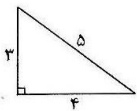
۹- در هر مثلث قائم‌الزاویه وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع قائمه.

- ☐ الف) دو برابر ☐ ب) مکعب ☐ ج) نصف ☐ د) مجذور

۱۰- قطره‌های یک لوزی ۱۲ و ۱۶ سانتی متر می‌باشند، محیط آن چقدر است؟

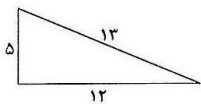
- ☐ الف) ۲۸ cm ☐ ب) ۵۶ cm ☐ ج) ۲۰ cm ☐ د) ۴۰ cm

۱۱- مربعی روی هر یک از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه مقابل رسم کنید. سپس مساحت هر مربع را به دست آورید و درستی رابطه فیثاغورس را بررسی کنید.

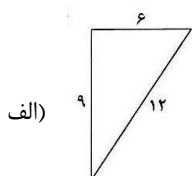


۱۲- آیا اندازه‌های ۱۴، ۱۱ و ۸ سانتی متر می‌توانند اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند؟ چرا؟

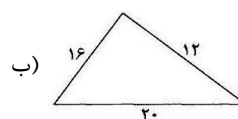
۱۳- آیا مثلث مقابل قائم‌الزاویه است؟ چرا؟



۱۴- مشخص کنید کدامیک از مثلث‌های زیر قائم‌الزاویه است؟

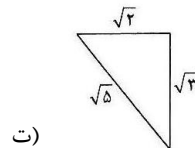
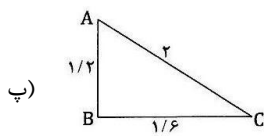


الف)

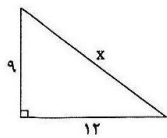


ب)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

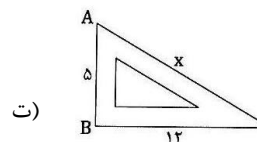
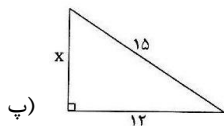
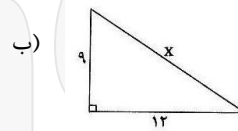
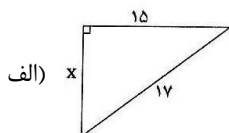


۱۵- با توجه به شکل زیر وتر مثلث (مقدار x) را به دست آورید.



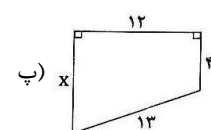
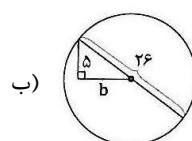
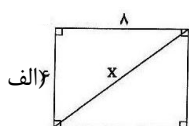
۱۶- قطر مربعی که اندازه هر ضلع آن ۸ سانتی متر است را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

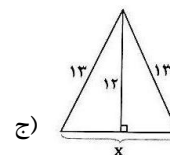
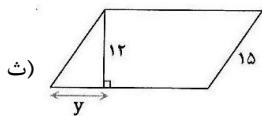
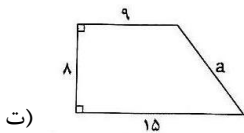
۱۷- در هر یک از شکل های زیر مقدار x را به دست آورید.



۱۸- قطر مستطیلی ۳۰ و طول آن ۲۴ سانتی متر است. عرض آن را به دست آورید.

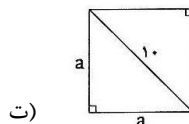
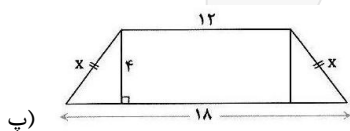
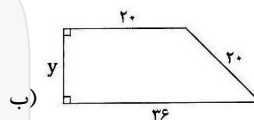
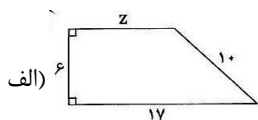
۱۹- در هر یک از شکل ها مقادیر مجهول را به دست آورید.



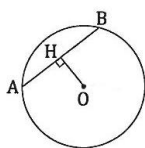


۲۰- قطر بزرگ یک لوزی ۲۴ cm و ضلع آن ۱۳ cm است. قطر کوچک آن چقدر است؟

۲۱- ساق‌های یک مثلث متساوی‌الساقین ۱۵ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر قاعده ۱۲ سانتی‌متر می‌باشد. اندازه قاعده آن را به دست آورید.

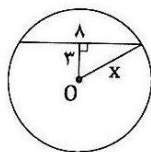


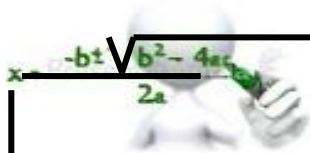
۲۳- وتر یک دایره ۳۰ cm و شعاع آن ۱۸ cm است. فاصله مرکز دایره تا وتر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.



$$(\overline{AB} = 30m)$$

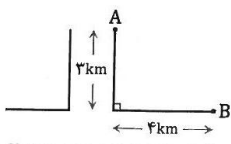
۲۴- در یک دایره فاصله مرکز دایره تا وتر ۳ سانتی‌متر و طول وتر ۸ سانتی‌متر است. شعاع دایره را حساب کنید.





۲۵- قطر مربعی ۵ سانتی متر است. اندازه ضلع مربع را تا ۱ رقم اعشار حساب کنید.

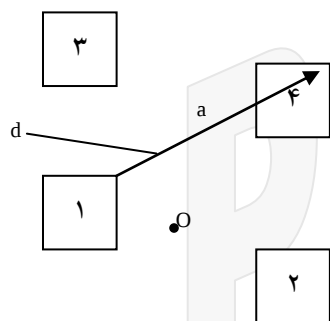
۲۶- راه شوسه بین دو روستای A و B مانند شکل مقابل است. فاصله مستقیم دو روستا چند کیلومتر است؟



۲-۶- شکل های هم نهشت

۱-۲-۶- نکات درسی:

نکته ۱: دو شکل هم نهشت هستند اگر بتوانیم یکی از آنها را با دو یا چند تبدیل هندسی (تقارن- دوران- انتقال) بر شکل دیگر منطبق کنیم به طوری که کاملاً یکدیگر را بپوشانند.



به عنوان مثال در شکل مقابل:

مربع (۱) با تقارن نسبت به نقطه «O» با مربع (۲) هم نهشت می باشد.

مربع (۱) با تقارن محوری نسبت به خط d با مربع (۳) هم نهشت می باشد.

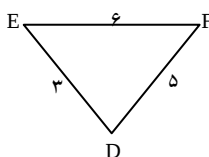
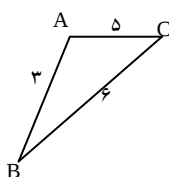
مربع (۱) با انتقال به وسیله $\vec{a}$ با مربع (۴) هم نهشت می باشد.

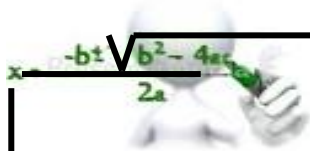
نکته ۲: برای مشخص کردن اجزای متناظر دو شکل هم نهشت، اگر دو شکل هم نهشت را طوری بر روی یکدیگر قرار دهیم تا یکدیگر را به طور کامل بپوشانند، ضلع های روی هم قرار گرفته با هم مساوی هستند و زاویه های روی هم قرار گرفته با هم مساوی هستند.

نکته ۳: زاویه های مقابل به اضلاع مساوی در دو شکل هم نهشت با هم برابرند.

B

D





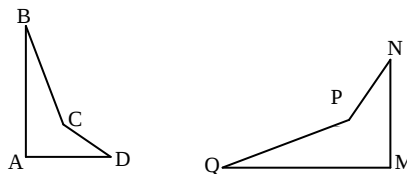
در دو شکل هم نهشت، زاویه‌های رو به رو به ضلع‌های مساوی با هم مساویند.

$$\overline{AB} = \overline{DE} \Rightarrow C = F, \quad \overline{AC} = \overline{DF} \Rightarrow B = E, \quad \overline{BC} = \overline{EF} \Rightarrow A = D$$

مثال: کبری می‌داند دو شکل زیر هم نهشتند، برای نوشتن اجزای متناظر او را راهنمایی کنید.

$$A = M, \quad B = Q, \quad C = P, \quad D = N$$

$$\overline{AB} = \overline{MQ}, \quad \overline{AD} = \overline{MN}, \quad \overline{BC} = \overline{QP}, \quad \overline{CD} = \overline{PN}$$

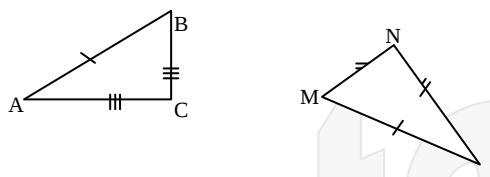


مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. اجزای متناظرشان را بنویسید.

$$\overline{AB} = \overline{MP} \Rightarrow C = N$$

$$\overline{BC} = \overline{MN} \Rightarrow A = P$$

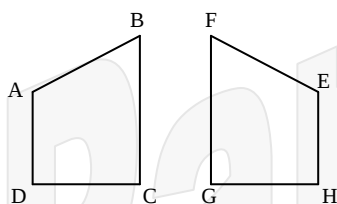
$$\overline{AC} = \overline{NP} \Rightarrow B = M$$



مثال: دو چهار ضلعی مقابل هم نهشت هستند (قرینه محوری) اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\overline{AB} = \overline{EF}, \quad \overline{BC} = \overline{FG}, \quad \overline{CD} = \overline{HG}, \quad \overline{AD} = \overline{EH}$$

$$A = E, \quad B = F, \quad C = G, \quad D = H$$

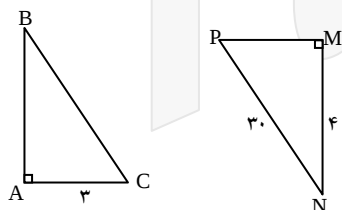


مثال: دو شکل زیر هم نهشت هستند (دوران 180°). اندازه ضلع‌ها و زاویه‌ها را بنویسید.

با نوشتن اجزای متناظر دو شکل، اندازه‌های خواسته شده را به دست می‌آوریم.

$$\overline{AC} = \overline{PM} = 3\text{cm}, \quad \overline{AB} = \overline{MN} = 4\text{cm}, \quad \overline{BC} = \overline{PN} = 5\text{cm}$$

$$A = M = 90^\circ, \quad B = N = 30^\circ, \quad C = P = 60^\circ$$



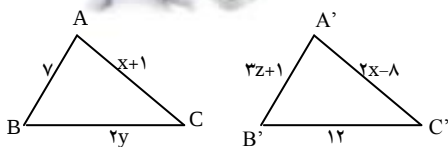
به این نکته توجه داشته باشید که برای به دست آوردن $(BC = PN = 5\text{cm})$ از رابطه فیثاغورس استفاده کردیم:

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2 \Rightarrow (BC)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5$$

و همچنین برای به دست آوردن اندازه زوایای $(C = P = 60^\circ)$ از مجموع زوایای هر مثلث استفاده کردیم:

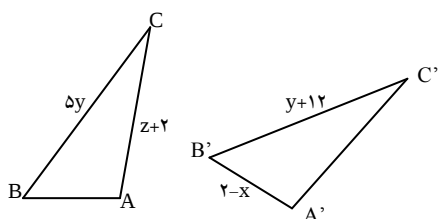
$$C = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند (انتقال). اندازه مجهولات را به دست آورید.



$\overline{AB} = \overline{A'B'}$	$\overline{AC} = \overline{A'C'}$	$\overline{BC} = \overline{B'C'}$
$y = 3z + 1$	$x + 1 = 2x - 8$	$2y = 12$
$y - 1 = 3z$	$x - 2x = -8 - 1$	$y = \frac{12}{2}$
$6 = 3z$	$-1x = -9$	$y = 6$
$2 = \frac{6}{3} = z$	$x = \frac{-9}{-1} = +9$	

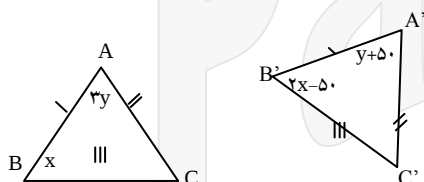
مثال: دو شکل زیر هم نهشت هستند، با تشکیل معادله و محاسبه مجهولات، اندازه هر ضلع را به دست آورید.



$\overline{AB} = \overline{A'B'}$	$\overline{AC} = \overline{A'C'}$	$\overline{BC} = \overline{B'C'}$
$x = 2 - x$	$z + 2 = 3z$	$5y = y + 12$
$x + x = 2$	$z - 3z = -2$	$5y - y = 12$
$2x = 2$	$-2z = -2$	$4y = 12$
$x = \frac{2}{2} = 1$	$z = \frac{-2}{-2} = +1$	$y = \frac{12}{4} = 3$

$\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$, $\overline{AC} = \overline{A'C'} = 3$, $\overline{BC} = \overline{B'C'} = 15$

مثال: دو شکل زیر هم نهشت هستند، با تشکیل معادله و محاسبه مجهولات، اندازه هر زاویه را به دست آورید.

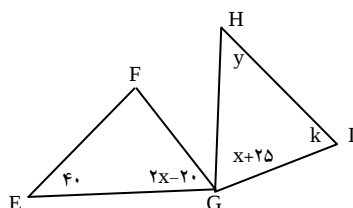


$A = A'$	$B = B'$
$3y = y + 50$	$x = 2x - 50$
$3y - y = 50$	$50 = 2x - x$
$2y = 50$	$50 = x$
$y = \frac{50}{2} = 25$	

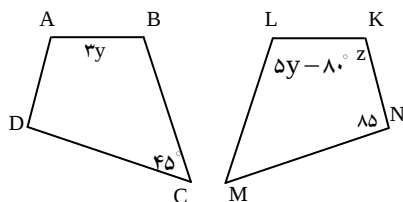
$A = A' = 25$, $B = B' = 50$

تمرینات کتاب درسی: ۲-۲-۶

تمرین ۱- الف) مثلث HIG حاصل دوران ۹۰ درجه EFG حول نقطه G است. زاویه‌های مجهول آن را پیدا کنید.



ب) چهار ضلعی $KLMN$ حاصل تقارن چهار ضلعی $ABCD$ نسبت به خط عمودی است. زاویه‌های مجهول آن را پیدا کنید.



۳-۲-۶- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

☐ الف) تقارن از تبدیل‌های هندسی نیست.

☐ ب) دوران و انتقال از تبدیل‌های هندسی نیست.

☐ پ) اگر دو شکل هم‌نهشت باشند، یک دیگر را کاملاً می‌پوشانند.

☐ ت) دو شکل که هم‌نهشت باشند، اجزای متناظر آن‌ها با هم مساوی‌اند.

☐ ث) اگر یک شکل را دوران دهیم، اضلاع در شکل دوران یافته تغییر نخواهند کرد.

☐ ج) اگر در دو شکل هم‌نهشت، $\overline{AB} = \overline{MN}$ و $\overline{AB} = 2x - 1$ و $\overline{MN} = 5$ باشد، آن‌گاه $x = 6$ است.

☐ چ) اگر شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی بر شکل دیگری منطبق کنیم، این دو شکل هم‌نهشت‌اند.

☐ ح) اگر شکلی را یک بار انتقال و یک بار دوران دهیم، شکل به دست آمده با شکل اول هم‌نهشت نیست.

☐ خ) اگر دو مثلث ABC و MNP هم‌نهشت باشند و $\hat{A} = \hat{M}$ و $\hat{B} = \hat{N}$ باشد، آن‌گاه $\overline{BC} = \overline{MP}$ می‌باشد.

☐ د) چهارضلعی‌های $ABCD$ و $MNPQ$ هم‌نهشت‌اند. $\hat{A} = \hat{Q}$ و $\hat{B} = \hat{M}$ و $\hat{C} = \hat{N}$ هستند، اگر $\hat{P} = 75^\circ$ باشد و زاویه $\hat{D} = 150^\circ$ درجه

باشد.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) دو شکل که بر هم منطبق باشند، یک دیگر را

ب) و و از تبدیل‌های هندسی هستند.

پ) در دو شکل هم‌نهشت، و متناظر با هم مساوی‌اند.

ت) اگر دو شکل کاملاً یک دیگر را بپوشانند، می‌گوییم با هم، هستند.

ث) اگر شکلی را یک بار قرینه و یک بار انتقال دهیم، شکل حاصل با شکل اول خواهد بود.

ج) اگر یک شکل را 180° درجه دوران دهیم، زاویه‌های شکل حاصل با شکل اول خواهد بود.

چ) اگر یک مستطیل را 360° درجه حولنقطه برخورد قطرها دوران دهیم، بر شکل اول م‌شود.

ح) اگر شکلی را یک بار انتقال دهیم و یک بار دوران دهیم، اضلاع شکل اول و حاصل با هم خواهند بود.

خ) در دو مثلث هم‌نهشت ABC و DEF، اگر $\hat{A} = \hat{D}$ ، $B = \hat{E}$ و $A + B = 115^\circ$ باشد، زاویه F مساوی درجه است.

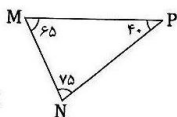
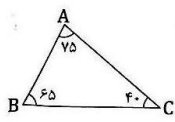
۳- اگر شکلی را دوران دهیم، اندازه‌های شکل حاصل چند برابر شکل اول خواهد بود؟

☐ الف) دو برابر ☐ ب) نصف ☐ ج) یک برابر ☐ د) سه برابر

۴- اگر شکل A دوران یافته شکل B و شکل C انتقال یافته شکل A باشد، کدام گزینه درباره مساحت شکل‌ها درست است؟

☐ الف) $B > A$ ☐ ب) $B = C$ ☐ ج) $B = 2C$ ☐ د) $C > A$

۵- دو شکل مقابل هم‌نهشت‌اند. کدام گزینه درست است؟



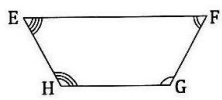
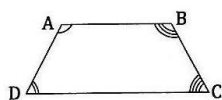
☐ ب) $\overline{AC} = \overline{MP}$

☐ الف) $\overline{AB} = \overline{NP}$

☐ د) $\overline{AB} = \overline{MN}$

☐ ج) $\overline{BC} = \overline{MN}$

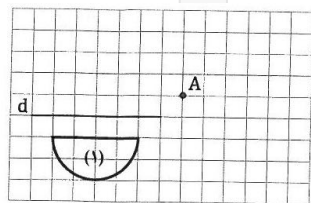
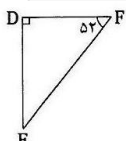
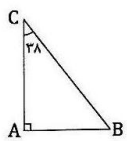
۶- دو شکل زیر با هم هم‌نهشت‌اند. با توجه به شکل، تساوی اضلاع و زوایای متناظر آن‌ها را بنویسید.



$\hat{A} = \dots\dots\dots$ $\hat{B} = \dots\dots\dots$ $\hat{C} = \dots\dots\dots$ $\hat{D} = \dots\dots\dots$

$\overline{AB} = \dots\dots\dots$ $\overline{AD} = \dots\dots\dots$ $\overline{DC} = \dots\dots\dots$ $\overline{BC} = \dots\dots\dots$

۷- دو مثلث زیر هم‌نهشت‌اند. تساوی اضلاع و زوایای متناظر آن‌ها را بنویسید.

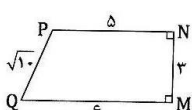
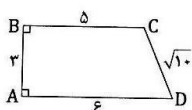


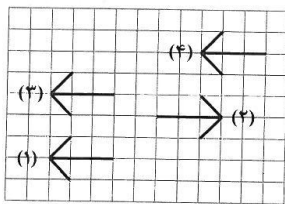
۸- قرینه شکل (۱) را نسبت به خط d رسم کنید و شکل حاصل را (۲) بنامید.

شکل ۲ را ۱۸۰ درجه نسبت به نقطه A دوران دهید تا شکل (۳) به دست آید.

شکل (۱) با کدام شکل هم‌نهشت است؟

۹- دو شکل زیر هم‌نهشت‌اند. بنویسید با چه تبدیلی بر هم منطبق می‌شوند؟ سپس اجزای متناظر آن‌ها را مشخص کنید.





۱۰- با توجه به شکل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) شکل (۲) با چه تبدیلی از شکل (۱) به دست آمده است؟

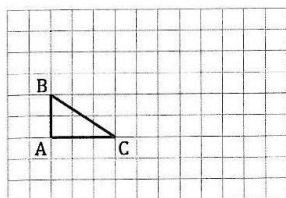
ب) شکل (۳) با چه تبدیلی از شکل (۱) به دست آمده است؟

پ) شکل (۴) با چه تبدیلی از شکل (۱) به دست آمده است؟

ت) آیا می‌توان با یکی از تبدیلات انتقال، تقارن یا دوران شکل (۲) را بر (۳) منطبق کرد؟

ث) آیا می‌توان با یکی از تبدیلات فوق، شکل (۴) را بر (۲) منطبق کرد؟

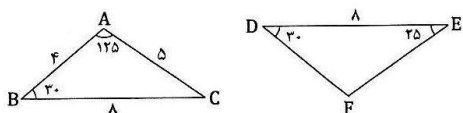
۱۱- مثلث ABC را با بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید. سپس شکل دوم را نسبت به انتقال یافته نقطه C به اندازه ۱۸۰ درجه دوران دهید و نام‌گذاری



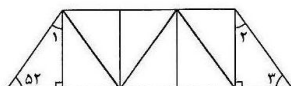
کنید. سپس تساوی زیر را کامل کنید.

$$\triangle ABC \cong \dots\dots\dots$$

۱۲- دو شکل زیر هم‌نهشت‌اند. اندازه سایر اجزا را بنویسید.

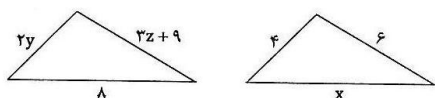


۱۳- مثلث‌های قائم‌الزاویه کنار سازه با هم برابرند (هم‌نهشت‌اند)، اندازه زاویه‌های مشخص شده را بنویسید.

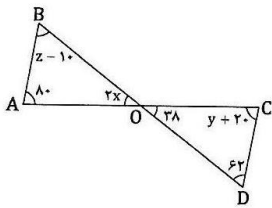


$$\hat{a} = \dots\dots\dots \quad \hat{b} = \dots\dots\dots \quad \hat{c} = \dots\dots\dots$$

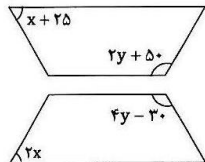
۱۴- مثلث‌های زیر را می‌توان با انتقال بر هم منطبق کرد. مقادیر x، y و z را با حل معادله به دست آورید.



۱۵- مثلث OAB را با دوران 180° درجه حول نقطه O بر مثلث OCD مطبق می‌کنیم. مقادیر x ، y و z را به دست آورید.

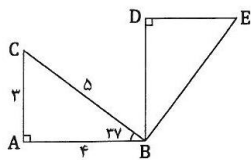


۱۶- دو دوزنقه زیر نسبت به خطی افقی تقارن دارند. ابتدا مقادیر x و y ، سپس اندازه زاویه‌ها را به دست آورید.

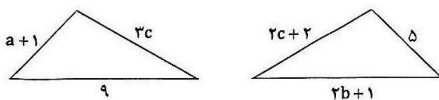


۱۷- مثلث BDE دوران یافته مثلث ABC حول نقطه B به اندازه 90° درجه است.

اندازه اضلاع و زوایای مثلث BDE را به دست آورید.



۱۸- دو مثلث زیر با تقارن محوری بر هم منطبق می‌شوند. اندازه اضلاع را به دست آورید.



۳-۶- مثلث‌های هم نهشت

۱-۳-۶- نکات درسی:

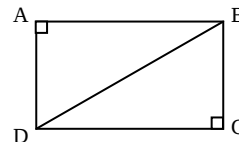
نکته ۱: از سه حالت زیر می‌توان برای اثبات هم نهشتی در مثلث استفاده کرد.

الف) تساوی دو ضلع و زاویه بین آنها (ض ز ض): اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند و زاویه بین آن دو ضلع با هم

مساوی باشد، آن دو ضلع هم نهشت هستند.

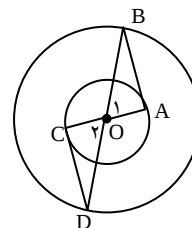
مثال: چهار ضلعی ABCD مستطیل می‌باشد. دلیل هم نهشتی دو مثلث ABD و BCD را بنویسید.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} = \text{طول مستطیل} \\ A = C = 90^\circ \\ \overline{AD} = \overline{BC} = \text{عرض مستطیل} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle ABD \cong \triangle BCD$$



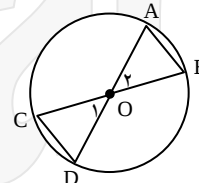
مثال: در شکل مقابل چرا دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} = \text{شعاع دایره کوچک} \\ O_1 = O_2 = \\ \overline{OB} = \overline{OD} = \text{متقابل به رأس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$



مثال: در شکل مقابل چرا دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند؟ اجزای متناظر آن‌ها را بنویسید.

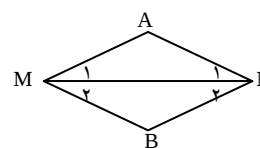
$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} = \text{شعاع دایره} \\ O_1 = O_2 = \\ \overline{OB} = \overline{OD} = \text{متقابل به رأس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ A = C \\ B = D \end{array} \right.$$



(ب) تساوی دو زاویه و ضلع بین آنها (ز ض ز): اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر مساوی باشند و ضلع بین آنها با هم مساوی باشد، آن دو مثلث با هم، هم نهشت هستند.

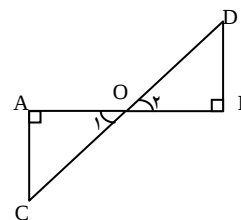
مثال: در شکل مقابل MN نیم ساز زاویه‌های M و N می‌باشد. چرا دو مثلث AMN و BMN هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = M_2 = \text{نیمساز است } MN \\ \overline{MN} = \overline{MN} = \text{ضلع مشترک} \\ N_1 = N_2 = \text{نیمساز است } MN \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle AMN \cong \triangle BMN$$



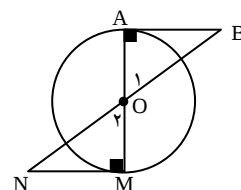
مثال: در شکل زیر نقطه O وسط AB می‌باشد. چرا دو مثلث OAC و OBD هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} A = B = 90^\circ \\ \overline{OA} = \overline{OB} \quad (\text{O وسط AB}) \\ O_1 = O_2 = \text{متقابل به رأس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle OAC \cong \triangle OBD$$



مثال: در شکل زیر چرا دو مثلث OAB و OMN هم نهشت هستند؟ اجزای متناظر آنها را بنویسید.

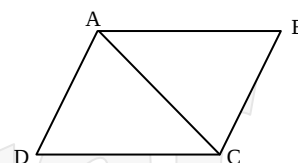
$$\left. \begin{array}{l} A = M = 90^\circ \\ \overline{OA} = \overline{OM} \\ O_1 = O_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{شعاع دایره} \\ \text{(ز ض ز)} \end{array} \rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OMN \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{MN} \\ \overline{OA} = \overline{OM} \\ B = N \end{array} \right.$$



(ج) تساوی سه ضلع (ض ض ض): اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث هم نهشت هستند.

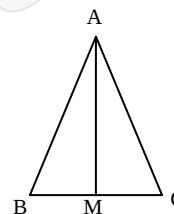
مثال: چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع می باشد. چرا دو مثلث ABC و ACD هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AC} = \overline{AC} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضلع های رو به رو} \\ \text{ضلع مشترک} \\ \text{ضلع های رو به رو} \end{array} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ABC \cong \triangle ACD$$



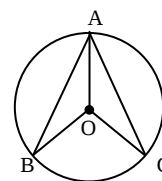
مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه BC می باشد. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \\ \overline{BM} = \overline{CM} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ساق های مثلث} \\ \text{ضلع مشترک} \\ \text{میانه AM} \end{array} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$



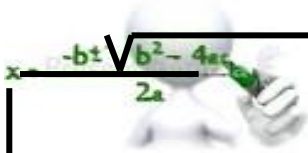
مثال: در شکل مقابل وترهای AB و AC مساوی هستند. چرا دو مثلث OAB و OAC هم نهشت هستند؟ اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OA} \\ \overline{OB} = \overline{OC} \\ \overline{AB} = \overline{AC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضلع مشترک} \\ \text{شعاع دایره} \\ \text{فرض مسئله} \end{array} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OAC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_2 \\ O_1 = O_2 \\ B = C \end{array} \right.$$



۲-۳-۶- تمرینات کتاب درسی

در این قسمت تمامی تمرینات در کتاب حل می شوند.



۳-۳-۶- سوالات طبقه بندی شده:

- ۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.
- ☐ الف) دو مثلث متساوی الاضلاع همواره هم‌نهشت‌اند.
- ☐ ب) دو مثلث در سه حالت می‌توانند هم‌نهشت باشند.
- ☐ پ) اگر سه زاویه در دو مثلث برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ☐ ت) اگر ضلع‌های دو شکل مساوی باشند، حتماً دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ☐ ث) اگر دو ضلع و یک زاویه بین دو مثلث برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ☐ ج) دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین که وتر آن‌ها برابر باشد، هم‌نهشت‌اند.
- ☐ چ) اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از دو مثلث برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ☐ ح) اگر زاویه رأس متساوی الساقین برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ☐ خ) اگر تصویر سه ضلع یک مثلث را روی کاغذ پوستی رسم کرده و کنار هم قرار دهیم، شکل به دست آمده با شکل اصلی هم‌نهشت است.
- ۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.
- الف) دو مثلث که ضلع آن‌ها برابر باشند، هم‌نهشت‌اند.
- ب) اگر فقط سه زاویه دو مثلث برابر باشند، آن‌ها هم‌نهشت
- پ) دو مثلث متساوی الساقین که قاعده و زاویه رأس آن‌ها برابر باشند،
- ت) اگر دو زاویه و بین آن دو زاویه از دو مثلث برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
- ث) اگر دو ضلع و بین آن دو ضلع از دو مثلث برابر باشند، آن‌ها هم‌نهشت‌اند.
- ج) دو مثلث قائم‌الزاویه که اضلاع قائمه آن‌ها برابر باشند، به حالت هم‌نهشت‌اند.
- چ) سه حالت هم‌نهشتی دو مثلث و می‌باشد.
- ح) دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین که وتر آن‌ها برابر باشند، به حالت هم‌نهشت‌اند.
- خ) دو مثلث متساوی الساقین که قاعده و زاویه رأس آن‌ها برابر باشند، به حالت هم‌نهشت‌اند.
- ۳- کدام گزینه از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث نیست؟

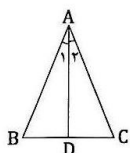
☐ الف) ض ض ض ☐ ب) ز ز ز ☐ ج) ض ض ض ☐ د) ز ض ز

۴- اگر سه ضلع دو مثلث متساوی‌الاضلاع برابر باشند، به کدام حالت هم‌نهشت‌اند؟

☐ الف) ض ض ض ☐ ب) ز ض ز ☐ ج) ض ض ض ☐ د) تمام موارد

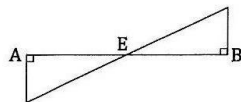
۵- اگر یک قطر مستطیلی را رسم کنیم، دو مثلث به وجود آید طبق کدام حالت هم‌نهشت‌اند؟

☐ الف) ض ض ض ☐ ب) ز ض ز ☐ ج) ض ض ض ☐ د) هر سه گزینه



۶- اگر دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت باشند، کدام گزینه درست نیست؟

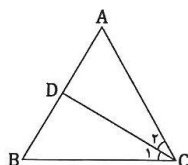
- الف) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ☐ $\hat{B} = \hat{C}$ ☐ $\overline{AB} = \overline{AC}$ ☐ $\overline{AB} = \overline{AD}$ ☐



۷- اگر E وسط AB باشد، دو مثلث بنابر کدام حالت هم‌نهشت‌اند؟

- الف) ض ز ض ☐ (ب) ز ض ز ☐
ج) ض ض ض ☐ (د) هم‌نهشت نیستند. ☐

۸- در مثلث متساوی الاضلاع ABC نیم‌ساز زاویه C را رسم کرده‌ایم. با کامل کردن عبارت‌ها نشان دهید چرا دو ضلع و زاویه بین آن‌ها در دو



مثلث به وجود آمده برابرند؟

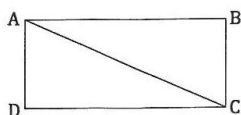
الف) $\overline{DC}$ ضلع دو مثلث است.

(ب) $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ چون

(پ) = چون

(ت) هم‌نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت بیان کنید.

۹- در مستطیل مقابل با کامل کردن عبارت‌های زیر نتیجه بگیرید که آیا دو مثلث با هم، هم‌نهشت‌اند یا خیر؟

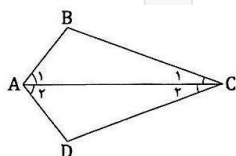


الف) $\overline{AD} = \overline{BC}$ چون

(ب) = چون در مستطیل طول‌ها مساوی‌اند.

(پ) $\hat{D} = \hat{C}$ چون

۱۰- AC نیم‌ساز زاویه‌های A و C است. با کامل کردن عبارت‌ها نتیجه بگیرید که دو مثلث ABC و ADC با هم هم‌نهشت‌اند.



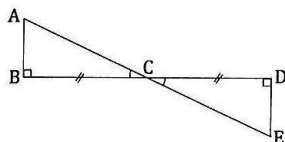
الف) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون

(ب) $\overline{AC} = \overline{AC}$ ضلع دو مثلث است.

(پ) = چون

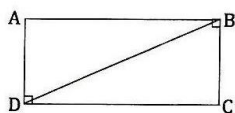
بنابراین دو مثلث

۱۱- در شکل مقابل با توجه به اجزای مشخص شده، حالت هم‌نهشتی را بنویسید.

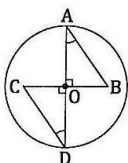


@riazicafe

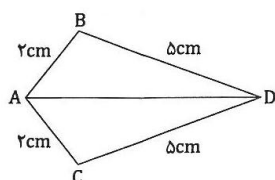
۱۲- در شکل زیر اجزای مساوی دو مثلث را مشخص کرده و دو حالت هم‌نهشتی برای مثلث‌ها بیان کنید. (ABCD مستطیل است).



۱۳- نقطه O مرکز دایره است. اجزای مساوی دو مثلث را مشخص کرده و حالت هم‌نهشتی را بیان کنید. ($A = B = 35^\circ$)



۱۴- با توجه به اندازه‌های روی شکل عبارت‌ها را کامل کنید و حالت هم‌نهشتی را بیان کنید.



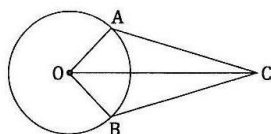
الف) $\overline{AB} = \dots\dots\dots$ چون $\dots\dots\dots$

ب) $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ چون $\dots\dots\dots$

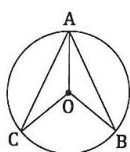
پ) ضلع $\overline{AD}$ $\dots\dots\dots$ دو مثلث است.

ت) پس به حالت $\dots\dots\dots$ دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

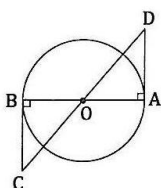
۱۵- نقطه O مرکز دایره بوده و OC نیمساز زاویه O است. اجزای متناظر دو مثلث OAC و OBC را مشخص کرده و حالت هم‌نهشتی را بنویسید.



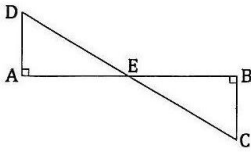
۱۶- در شکل زیر $\overline{AB} = \overline{AC}$ است. اجزای مساوی دو مثلث AOB و AOC را مشخص کرده و حالت هم‌نهشتی آن‌ها را بیان کنید.



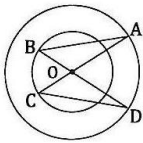
۱۷- اجزای مساوی دو مثلث OAD و OBC را مشخص کرده و حالت هم‌نهشتی آن‌ها را بیان کنید.



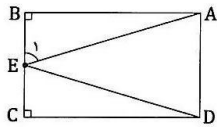
۱۸- نقطه E وسط پاره خط AB است. اجزای مساوی دو مثلث BEC و AED را مشخص کنید. آیا می توان گفت این دو مثلث BEC و AED هم نهشت اند؟ چرا؟



۱۹- در شکل مقابل نقطه O مرکز هر دو دایره است. چرا دو مثلث OAB و OCD با هم، هم نهشت اند؟



۲۰- چهار ضلعی ABCD مستطیل است. نقطه E وسط ضلع BC می باشد.

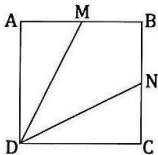


الف) چرا دو مثلث ABE و DEC با هم، هم نهشت اند؟

ب) سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\overline{AE} = \dots\dots\dots \text{ و } E = \dots\dots\dots$$

۲۱- در مربع ABCD نقطه M وسط ضلع AB و نقطه N وسط ضلع BC است. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMD و CND را بنویسید.



۴-۶- هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه

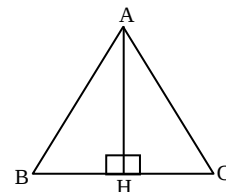
۱-۴-۶- نکات درسی:

نکته ۱: برای نشان دادن هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه علاوه بر سه حالت درس قبل، می توان ازدو حالت زیر استفاده کرد.

الف) تساوی وتر و یک ضلع (و ض): اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشد، آن دو مثلث هم نهشت هستند.

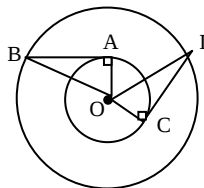
مثال: در شکل زیر AH ارتفاع مثلث متساوی الساقین ABC می باشد. چرا دو مثلث AHB و AHC هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AH} = \overline{AH} \\ \overline{AB} = \overline{AC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ضلع مشترک} \\ \text{ساق مثلث متساوی الساقین} \end{array} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \triangle AHB \cong \triangle AHC$$



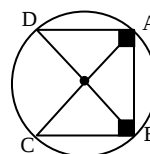
مثال: در شکل زیر چرا دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OB} = \overline{OD} \quad \text{شعاع دایره بزرگ} \\ \overline{OA} = \overline{OC} \quad \text{شعاع دایره کوچک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$



مثال: در شکل مقابل چرا دو مثلث ABC و ABD هم نهشت هستند؟ اجزای متناظر آنها را بنویسید.

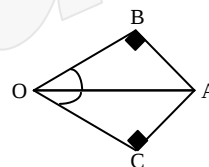
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{BD} \quad \text{قطر دایره} \\ \overline{AB} = \overline{AB} \quad \text{ضلع مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ D = C \\ A_1 = B_1 \end{array} \right.$$



ب) تساوی وتر و یک زاویه تند (و ز): اگر وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند، دو مثلث هم نهشت هستند.

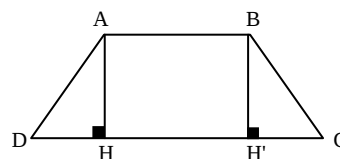
مثال: در شکل زیر OA نیمساز O می‌باشد. چرا دو مثلث OAB و OAC هم نهشت هستند؟

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OA} \quad \text{ضلع مشترک} \\ O_1 = O_2 \quad \text{نیمساز } OA \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ز)}} \triangle OAB \cong \triangle OAC$$



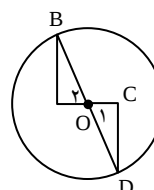
مثال: چهار ضلعی $ABCD$ دوزنقه متساوی الساقین می‌باشد. چرا دو مثلث AHD و $BH'C$ هم نهشت هستند؟

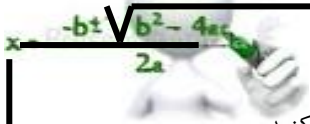
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \quad \text{ساق‌های دوزنقه متساوی الساقین} \\ D = C \quad \text{زاویه‌های مجاور به قاعده} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ز)}} \triangle AHD \cong \triangle BH'C$$



مثال: معلم از دانش آموزان خواست نشان دهند دو مثلث در شکل زیر هم نهشت هستند. آن‌ها را راهنمایی کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OB} = \overline{OD} \quad \text{شعاع دایره} \\ O_1 = O_2 \quad \text{متقابل به رأس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ز)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$





مثال: عرفان می‌خواهد ثابت کند در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر ساق‌ها با هم مساویند. او را راهنمایی کنید.

حل: باید ثابت کنیم $\overline{CH} = \overline{BH'}$ ؛ برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم دو مثلث BHC و $BH'C$ با هم برابرند. سپس با نوشتن رابطه تساوی

برای اجزای متناظر، درستی تساوی $\overline{CH} = \overline{BH'}$ نتیجه می‌شود.

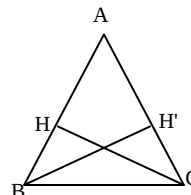
$$\overline{BC} = \overline{BC}$$

$$B = C$$

ضلع مشترک

زوایای پای ساق مثلث متساوی الساقین

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = \overline{BC} \\ B = C \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \triangle BHC \cong \triangle BH'C \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \overline{CH} = \overline{BH'}$$

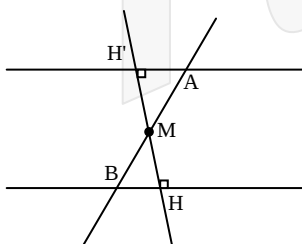


نکته ۲: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است.

نکته ۳: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

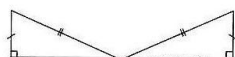
تمرینات کتاب درسی: ۲-۴-۶

تمرین ۱- از نقطه M ، وسط پاره خط AB ، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم. دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت هستند؟



۳-۴-۶- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

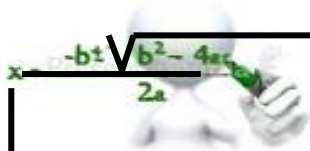


☐ الف) دو مثلث مقابل به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند.

☐ ب) دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین همواره هم‌نهشت‌اند.

☐ پ) برای مثلث‌های قائم‌الزاویه فقط دو حالت هم‌نهشتی وجود دارد.

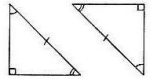
☐ ت) حالت وتر و یک ضلع از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه است.



☐ ث) برای هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، تساوی وترهای آن‌ها کافی است.

☐ ج) یکی از حالت‌های نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، وتر و یک زاویه تند است.

☐ چ) حالت‌های (و ز) و (و ض)، حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث متساوی‌الاضلاع است.

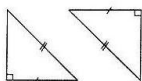
☐ ح) دو مثلث  به حالت وتر و زاویه تند هم‌نهشت‌اند.

☐ خ) اگر اضلاع قائمه دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

☐ د) حالت‌های (ض ز ض) و (ز ض ز) و (ض ض ض) نیز از حالت‌های هم‌نهشتی مثلث قائم‌الزاویه است.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) برای هم‌نهشتی انواع مثلث‌ها حالت وجود دارد.

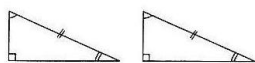


ب) در شکل مقابل دو مثلث بنابر حالت هم‌نهشت‌اند.

پ) برای هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه هم‌نهشت‌اند.

ت) دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین همواره هم‌نهشت

ث) هر نقطه روی یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است.



ج) دو مثلث مقابل بنابر حالت و هم‌نهشت‌اند.

چ) اگر و یک زاویه تند در دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

ح) هر نقطه روی یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

خ) اگر وتر و یک قائمه در دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشند، آن‌ها هم‌نهشت‌اند.

د) حالت‌های و برای هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه است

ذ) حالت‌های و و برای هم‌نهشتی تمامی مثلث‌ها است.

۳- دو مثلث مقابل بنابر کدام حالت هم‌نهشت‌اند؟

☐ الف) ض ز ض ☐ ب) و ض

☐ ج) و ز ☐ د) ز ض ز

۴- برای هم‌نهشتی انواع مثلث‌ها چند حالت وجود دارد؟

☐ الف) ۳ ☐ ب) ۴ ☐ ج) ۵ ☐ د) ۲

۵- برای هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه چند حالت وجود دارد؟

☐ الف) ۳ ☐ ب) ۴ ☐ ج) ۵ ☐ د) ۲

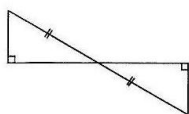
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

۶- کدام گزینه فقط برای هم‌نهشتی مثلث قائم‌الزاویه است؟

- ☐ الف) ض ز ض ☐ ب) ز ض ز ☐ ج) ض ض ض ☐ د) د و ز

۷- دو مثلث مقابل بنابر کدام حالت هم‌نهشت‌اند؟

- ☐ الف) ز ض ز ☐ ب) و ز ☐ ج) و ض ☐ د) ض ز ض



۸- اگر هر نقطه روی عمود منصف یک باشد، از دو سر آن به یک فاصله است.

- ☐ الف) خط ☐ ب) نیم‌خط ☐ ج) پاره‌خط ☐ د) زاویه

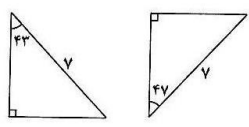
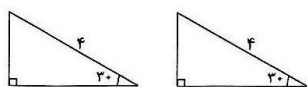
۹- وتر و یک زاویه تند از دو مثلث قائم‌الزاویه مقابل برابرند.

الف) زاویه نامعلوم هر مثلث را به دست آورید.

ب) آیا زاویه به دست آمده در دو شکل برابرند؟

پ) آیا این دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

ت) آیا می‌توان گفت اگر وتر و یک زاویه تند د دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

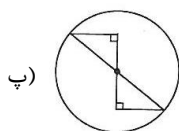


۱۰- زاویه نامعلوم هر مثلث را بدست آورید.

دو مثلث در چه حالت‌هایی هم‌نهشت‌اند؟

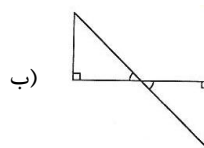


الف)

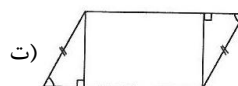


پ)

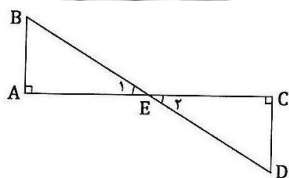
۱۱- حالت هم‌نهشتی را بیان کنید.



ب)



ت)



۱۲- نقطه E وسط $\overline{BD}$ است. عبارت‌ها را کامل کنید.

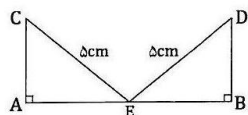
(الف) $\overline{BE} = \dots\dots\dots$ چون $\dots\dots\dots$.

(ب) $\angle E = \dots\dots\dots$ چون $\dots\dots\dots$.

(پ) بنابراین دو مثلث بنابر حالت $\dots\dots\dots$ هم‌نهشت‌اند.

(ت) مثلث ABE با چه تبدیلی بر مثلث DCE منطبق می‌شود؟

۱۳- E وسط $\overline{AB}$ است. عبارت‌های زیر را کامل کنید و حالت هم‌نهشتی را بیان کنید.

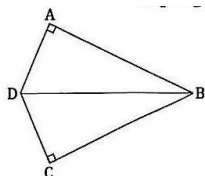


(الف) $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ چون هر دو ۵ cm هستند.

(ب) $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ چون $\dots\dots\dots$.

(پ) پس بنابر حالت $\dots\dots\dots$ دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱۴- $\overline{DB}$ نیمساز زاویه D است. عبارت‌های زیر را کامل کنید و حالت هم‌نهشتی دو مثلث ADB و CDB را بیان کنید.

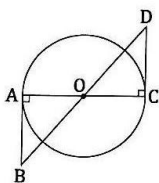


(الف) $\overline{DB}$ ضلع $\dots\dots\dots$ دو مثلث است.

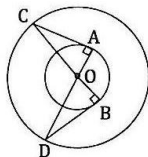
(ب) $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ چون $\dots\dots\dots$.

(پ) حالت هم‌نهشتی: $\dots\dots\dots$

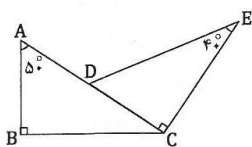
۱۵- اجزای مساوی دو مثلث AOB و COD را با ذکر دلیل بیان کنید و حالت هم‌نهشتی آن‌ها را نام ببرید.



۱۶- اجزای مساوی و حالت هم‌نهشتی دو مثلث OAC و OBD را بیان کنید.



۱۷- در شکل مقابل $\overline{AC} = \overline{DE}$ ؛ ثابت کنید دو مثلث ABC و DEC با هم هم‌نهشت‌اند.



۷-۱- توان

۷-۱-۱- نکات درسی:

نکته ۱: برای ضرب اعداد توان دار از قوانین زیر استفاده می کنیم:

الف) در ضرب عددهای توان دار اگر پایه ها مساوی باشند، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ب) در ضرب عددهای توان دار اگر توان ها مساوی باشند، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\begin{aligned} 3^7 \times 3^5 &= 3^{7+5} = 3^{12} & (0/8)^7 \times (0/8)^4 &= (0/8)^{11} & \left(-1\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(-1\frac{1}{5}\right)^3 &= \left(-1\frac{1}{5}\right)^5 \\ 4^7 \times 2^7 &= (4 \times 2)^7 = 8^7 & (-6)^4 \times 4^4 &= (-24)^4 & \left(\frac{3}{4}\right)^6 \times 8^6 &= 6^6 \\ (-4)^7 \times 2^7 &= (-8)^7 & xy^7 \times x^7 y^7 &= x^{14} y^{14} & 3^7 \times 6^4 \times 4^7 \times 2^4 &= 12^7 \times 12^4 = 12^{11} \\ 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^7 \times 2^8 &= 2^7 \times 1 \times 2^8 = 2^{15} & \left(\frac{3}{7}\right)^4 \times (-21)^4 &= (-9)^4 \end{aligned}$$

نکته ۲: برای به توان رساندن یک عدد توان دار کافی است توان ها را در هم ضرب کنیم.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

مثال: عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\begin{aligned} (2^7)^4 &= 2^{7 \times 4} = 2^{28} & (5^7)^4 &= 5^{7 \times 4} = 5^{28} & [(-4)^3]^5 &= (-4)^{15} \\ (2^x)^y &= 2^{xy} & [(ab)^7]^4 &= (ab)^{28} = a^{28} b^{28} & (x^7 y^7)^4 &= x^{28} y^{28} \\ ((-5)^7)^4 &= 1^7 = 1 & (ab^7)^4 \times (a^7 b)^4 &= a^{28} b^{28} \times a^4 b^4 = a^{32} b^{32} & (-5^7)^4 &= -5^{28} \end{aligned}$$

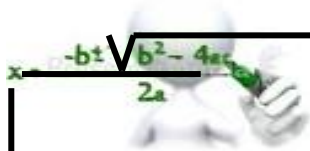
نکته ۳: اگر بخواهیم یک عدد توان دار را بدون پرانتز به توان برسانیم، باید توان را به توان برسانیم و اجازه ضرب توان ها را نداریم.

مثال: به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\begin{cases} (2^7)^4 = 2^{7 \times 4} = 2^{28} \\ 2^{28} = 2^8 \end{cases} \quad \begin{cases} (7^5)^7 = 7^{5 \times 7} = 7^{35} \\ 7^{35} = 7^{25} \end{cases}$$

نکته ۴: چون در جمع عددهای توان دار قانونی وجود ندارد، بنابراین اگر عددها مساوی باشند ابتدا جمع را به ضرب تبدیل کرده، سپس از

قوانین ضرب استفاده می کنیم. برای تبدیل جمع به ضرب کافی است تعداد عددها را در یکی از آنها ضرب کنیم.



مثال: به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$3^6 + 3^6 + 3^6 = 3 \times 3^6 = 3^7$$

$$2^{41} + 2^{41} = 2 \times 2^{41} = 2^{42}$$

$$5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 = 5 \times 5^9 = 5^{10}$$

$$3^{16} + 3^{16} + 3^{16} = 3 \times 3^{16} = 3^{17}$$

$$\underbrace{2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5}_{2 \times 2^5} = \underbrace{2 \times 2^5 + 2^5 + 2^5}_{2 \times 2^5} = 2^5 + 2^5 + 2^5 = \underbrace{2 \times 2^5 + 2^5}_{2^5} = 2^5 + 2^5 = 2 \times 2^5 = 2^6$$

نکته ۵: بعضی اوقات در یک عبارت پایه یا توان مساوی وجود ندارد ولی با تجزیه عامل های اول می توان پایه یا توان مساوی ایجاد کرد. سپس

عبارت را ساده نمود.

مثال: به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$8 \times 5^7 = 2^3 \times 5^7 = 10^7$$

$$7^6 \times 16 = 7^6 \times 2^4 = 14^6$$

$$27 \times 9^7 = 3^3 \times (3^2)^7 = 3^3 \times 3^{14} = 3^{17}$$

$$32^6 \times 8^7 = (2^5)^6 \times (2^3)^7 = 2^{30} \times 2^{21} = 2^{51}$$

$$64 \times 4^7 = 2^6 \times (2^2)^7 = 2^6 \times 2^{14} = 2^{20}$$

$$27^2 \times 81^3 = (3^3)^2 \times (3^4)^3 = 3^6 \times 3^{12} = 3^{18}$$

$$6^7 \times 12^6 \times 3^6 = (2^1 \times 3^2) \times (2^2 \times 3)^6 \times 3^6 = 2^7 \times 3^{12} \times 2^6 \times 3^6 \times 3^6 = 2^{13} \times 3^{24} = 6^{27}$$

$$25 \times 5^4 \times 125^7 = 5^2 \times 5^4 \times (5^3)^7 = 5^2 \times 5^4 \times 5^{21} = 5^{27}$$

نکته ۶: برای پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت جبری توان دار، مقادیر عددی را همانند عبارات جبری بدون توان جایگزین متغیرها می کنیم.

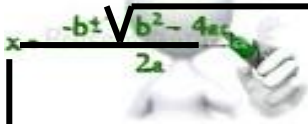
مثال: مقدار عددی عبارت مقابل را به ازای $a=2, b=-3, c=-1$ به دست آورید.

$$\frac{a^7 - (b - c^7) + \left(\frac{b^7}{3}\right)^7}{ab - \frac{a^7}{4} - c^7} = \frac{2^7 - (-3 - (-1)^7) + \left(\frac{(-3)^7}{3}\right)^7}{2 \times (-3) - \frac{2^7}{4} - (-1)^7} = \frac{4 - (-3 - 1) + \left(\frac{9}{3}\right)^7}{-6 - \frac{4}{4} - (-1)} = \frac{4 + 4 + 9}{-6 - 1 + 1} = -\frac{17}{6}$$

۲-۱-۷- تمرینات کتاب درسی:

تمرین ۱- مقدار عددی عبارت $a - b(c \times b^7)$ را به ازای $a=20, b=4, c=2$ به دست آورید.

تمرین ۲- حجم مکعبی به ضلع 8 cm را به صورت یک عدد توان دار، که پایه آن عدد ۲ باشد، بنویسید.



تمرین ۳- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

تمرین ۴- حاصل $2^7 + 2^7$ و حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

تمرین ۵- مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای $a=6, b=-2, c=-4$ به دست آورید.

الف) $-\frac{c^2}{b} + 2(a+b^2) =$

ب) $10 - bc + \left(\frac{a}{b}\right)^2 =$

۲-۲-۷- سوالات طبقه بندی شده

۱- جمله های درست را با «✓» و جمله های نادرست را با «x» مشخص کنید.

- ☐ الف) همواره $4^2 > 2^4$ است.
- ☐ ب) ۸ برابر عدد 2^5 برابر 2^8 است.
- ☐ پ) ۹ برابر عدد 3^5 برابر 2^4 است.
- ☐ ت) حاصل جمع 5^2 و 10^2 برابر ۵ است.
- ☐ ث) مساحت مربعی به ضلع x برابر x^2 است.
- ☐ ج) حاصل $1^7 + (-7)^2 + 7^2 -$ مساوی ۹۹ است.
- ☐ چ) حاصل $5^3 \times 5^2 \times 5^3 \times 5^2$ مساوی 5^{12} است.
- ☐ ح) حاصل $1^{100} + (7^{20} + 9^{20})$ برابر است با ۲.

۲- هر یک از جمله های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) $8^5 \times 3 = 8^5$ ☐

ب) $(\frac{1}{5})^0 \times \square = (\frac{1}{5})^5$ ☐

پ) صفر به هر توانی (به جز صفر) برسد، حاصل است.

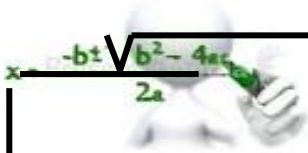
ث) حاصل عبارت $a^n \times a^m$ به صورت توان دار برابر است با $a^{\square}$.

ج) حاصل عبارت $a^n \times b^n$ به صورت توان دار برابر است با $\square^n$.

چ) حاصل $\left(\frac{-1}{5}\right)^2$ مساوی و $\frac{-1^2}{5}$ مساوی است.

ح) در عبارت 3^7 عدد ۳ را و عدد ۷ را می نامند.

خ) هر عدد به توان ۲ را آن عدد و هر عدد به توان ۳ را آن عدد گویند.



۳- کدام یک از عبارت‌های زیر مساوی x^5 است؟

- ☐ الف) $5x$ ☐ ب) $x \times x \times x \times x \times x$ ☐ ج) $x + x + x + x + x$ ☐ د) $x^5 + x^5 + x$

۴- مساحت مربعی به ضلع $3a$ کدام است؟

- ☐ الف) $9a^2$ ☐ ب) $3a^2$ ☐ ج) $(3a)^2$ ☐ د) گزینه‌های الف و ج

۵- نسبت مجذور عدد $\frac{4}{3}$ به مکعب آن کدام است؟

- ☐ الف) $\frac{4}{3}$ ☐ ب) $\frac{16}{9}$ ☐ ج) $\frac{9}{16}$ ☐ د) $\frac{3}{4}$

۶- حاصل $\frac{5^2}{4}$ برابر است با:

- ☐ الف) $\frac{25}{16}$ ☐ ب) $\frac{5}{16}$ ☐ ج) $\frac{25}{4}$ ☐ د) هیچ کدام

۷- حاصل $1^{50} \times (4^2 - 3^2)$ کدام است؟

- ☐ الف) 150 ☐ ب) 55 ☐ ج) 5^5 ☐ د) 1^{55}

۸- عبارت $6^5 \times (-3)^3 \times (-2)^3$ برابر است با:

- ☐ الف) -6^{10} ☐ ب) 6^{10} ☐ ج) 6^8 ☐ د) 6^5

۹- حاصل عبارت $(1^{1000} - 1^{100}) + (1^{100} - 1^{10})$ کدام است؟

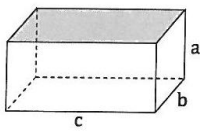
- ☐ الف) صفر ☐ ب) 1 ☐ ج) 2 ☐ د) 3

۱۰- حاصل $7^{x+1} \times 7^{x-1}$ کدام است؟

- ☐ الف) 7^x ☐ ب) 7^{3x} ☐ ج) 7^{3x+2} ☐ د) 7^{x+1}

۱۱- حاصل 81×3^6 برابر است با:

- ☐ الف) 243^6 ☐ ب) 3^{10} ☐ ج) 243^7 ☐ د) 3^7



۱۲- مساحت کل و حجم مکعب مقابل را به صورت جبری بنویسید.

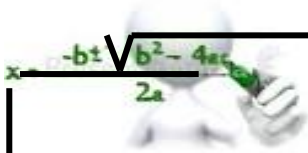
اگر $a=5$ و $b=6$ و $c=10$ باشد، مقدار مساحت کل و حجم را به دست آورید.

۱۳- اعداد زیر را به صورت گسترده نوشته سپس به صورت توانی بنویسید.

الف) $2431 = 2000 + 400 + 30 + 1 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

ب) $679352 =$

پ) $9073 =$



۱۴- حاصل عبارت‌های زیر را به ازای $x = -2$ و $y = 1$ حساب کنید.

الف) $\frac{3x^2y - y^2}{x^2 + y^2} =$

ب) $5x^2 - 3xy + 2y^2 =$

پ) $x^2y^2 - x^2y^2 =$

ت) $(xy + x^2)^2 =$

۱۵- اعداد زیر را به صورت ضرب اعداد اول بنویسید. (تجزیه کنید)

الف) $169 =$

ب) $1000 =$

پ) $270 =$

ت) $574 =$

ث) $88 =$

ج) $246 =$

۱۶- اگر $2^4 = 512$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2^{10} =$

ب) $2^{12} =$

پ) $2^{11} =$

ت) $2^{12} =$

۱۷- 1000 برابر 10^4 را به دست آورید.

۱۸- 32 برابر مجذور 2^4 را حساب کنید.

۱۹- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $5 \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times 125 =$

الف) $49 \times 121 =$

پ) $4^5 \times 8^3 \times 16^2 =$

۲۰- در تساوی مقابل به جای a و b کدام اعداد طبیعی دیگر را می‌توانیم قرار دهیم؟ تمام این اعداد را در جدول زیر قرار دهید. $3^a \times 3^b = 3^5$

a	۱			
b	۴			

۲۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

☐ الف) $(7^3)^4 = (7^4)^3$ ☐ ب) $((-5^2))^3 = (-5)^6$

☐ پ) حاصل 25^2 برابر است با 5^4 ☐ ت) حاصل $(-9)^4$ مساوی -9^4 است.

☐ ث) حاصل $2^{12} = 8^4 = 64^2$ می‌باشد. ☐ ج) ۸ برابر عدد 4^5 برابر است با 16^5 .

☐ چ) حجم مکعبی به ضلع ۴ برابر است با 2^6 . ☐ ح) عبارت $(a)^{nm}$ برابر با عبارت a^{nm} می‌باشد.

☐ خ) هر عدد منفی به توان زوج برسد همواره حاصل، عددی مثبت است.

۲۲- حاصل عبارت $[(-5)^3]^2$ برابر است با:

☐ الف) $(-5)^6$ ☐ ب) -5^6 ☐ ج) $(-5)^9$ ☐ د) گزینه‌های ب و ج

۲۳- حاصل عبارت $(a^2)^3 \times (b^2)^4$ کدام است؟

☐ الف) $a^6 b^{12}$ ☐ ب) $(ab)^{12}$ ☐ ج) $a^2 b^{12}$ ☐ د) $(ab)^6$

۲۴- مکعب عدد ۹ برابر است با:

☐ الف) ۸۱ ☐ ب) 3^3 ☐ ج) 9^6 ☐ د) 3^6

۲۵- ۹ برابر عدد $(3^5)^4$ کدام است؟

☐ الف) 3^{12} ☐ ب) 3^{12} ☐ ج) 3^{11} ☐ د) 3^{20}

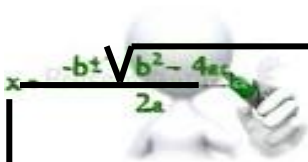
۲۶- به ازای چه مقدار از a عبارت $5^{12} = (5^a)^2$ برقرار است؟

☐ الف) $a = 9$ ☐ ب) $a = 3$ ☐ ج) $a = 6$ ☐ د) $a = 4$

۲۷- حاصل عبارت $[(x^3)^2]^5$ برابر است با:

☐ الف) x^{10} ☐ ب) x^{15} ☐ ج) x^{20} ☐ د) x^{11}

۲۸- آیا حاصل $(-7)^4$ مساوی -7^4 می‌باشد؟ چرا؟ با مثال دیگری توضیح دهید.



۲۹- آیا تساوی $(v^3)^5 = (v^5)^3$ برقرار است؟ چرا؟ آیا می توان نتیجه گرفت: $(x^a)^b = (x^b)^a$

۳۰- در یک کلاس ۸ دانش آموز هستند و هر دانش آموز ۸ کیف دارد و داخل هر کیف ۸ اسکناس وجود دارد. در این کلاس چند اسکناس وجود دارد. آن را به صورت عدد توان دار با پایه ۲ بنویسید.

۳۱- حاصل عبارت های زیر را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $2^7 \times 2^5 \times 5^{12} \times 10^6 =$

ب) $3^{50} + 3^{50} + 3^{50} =$

پ) $(a^2)^7 \cdot (b^2)^3 \cdot a^5 b^4 =$

ت) $(27^3)^5 \cdot (4^{15})^3 =$

ث) $3^5 \times 15^2 \times 5^5 =$

ج) $(-3)^4 \times (-6)^3 \times 2^4 =$

چ) $3^{12} + 3^{12} + 3^{12} =$

ح) $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 =$

خ) $(3^5 + 3^5 + 3^5) \times (2^2 + 2^2)^2 =$

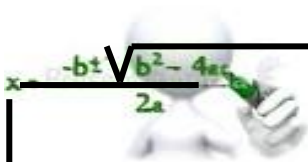
د) $\underbrace{a^2 + a^2 + a^2 + \dots + a^2}_{\text{مرتبۀ } a} =$

ز) $\underbrace{1 \cdot b + 1 \cdot b + 1 \cdot b + \dots + 1 \cdot b}_{\text{مرتبۀ } 10} =$

۳۲- مقدار عددی عبارت $(x^a)^b$ را به ازای $a=2$, $b=3$, $x=5$ حساب کنید.

۳۳- آیا تساوی مقابل برقرار است؟ چرا؟

$(5^2)^3 = 5^7$



۳۴- آیا تساوی $(7^3)^5 = (7^5)^3$ برقرار است؟ چرا؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(x^a)^b = (x^b)^a$

۳۵- حاصل عبارت مقابل را به ازای $x = ۱۲۵$, $y = ۲۵$, $z = ۲$ به صورت توان‌دار بنویسید.

$$(x \times y)^{y^z}$$

۳۶- مقدار عددی عبارت مقابل را به ازای $a = ۴$, $b = -۱$, $c = ۱۰$ به دست آورید.

$$(a \times b^c) \times a + c =$$

۳۷- در هر یک از قسمت‌های زیر مقدار عبارت $\sqrt{b^2 - 4ac}$ را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $a = ۱$ و $b = -۵$ و $c = ۶$

ب) $a = ۲$ و $b = ۳$ و $c = -۴$

پ) $a = -۴$ و $b = -۲$ و $c = ۱$

۳۹- مقدار عددی هر عبارت را به ازای $a = ۱$, $b = -۳$ و $c = ۱۰$ به دست آورید.

الف) $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

ب) $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

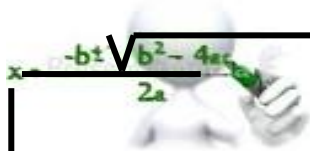
۷-۲- تقسیم عددهای توان‌دار

۷-۲-۱- نکات درسی:

نکته ۱: در تقسیم عددهای توان‌دار برای نوشتن حاصل تقسیم به صورت یک عدد توان‌دار می‌توان از دو قانون زیر استفاده کرد:

الف) تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی: در تقسیم توان‌ها اگر پایه‌ها مساوی باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$



مثال: به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$3^5 \div 3^2 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = 3 \times 3 = 3^2$$

$$(-8)^5 \div (-8)^2 = (-8)^{5-2} = (-8)^3$$

$$10^{14} \div 10^9 = 10^5$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{11} \div \left(-\frac{3}{5}\right)^8 = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$$

$$a^{20} \div a^{12} = a^8$$

$$(yz)^4 \div (yz)^2 = (yz)^2 = y^2 z^2$$

ذکر این نکته ضروری می باشد که در تقسیم با پایه های مساوی، اگر توان عدد اول از عدد دوم کوچک تر باشد می توان حاصل را به صورت یک کسر نوشت.

مثال:

$$2^8 \div 2^{12} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^4}$$

$$7^4 \div 7^{15} = \frac{7^4}{7^{15}} = \frac{1}{7^{11}}$$

$$(-7)^{10} \div (-7)^{14} = \frac{1}{(-7)^4}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 \div \left(\frac{2}{5}\right)^{17} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{12}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{12}$$

ب) تقسیم دو عدد با توان مساوی: در تقسیم عددهای توان دار اگر توان ها مساوی باشند، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

مثال: به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$12^8 \div 3^8 = 4^8$$

$$(-20)^5 \div 4^5 = (-5)^5$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{10} \div 9^{10} = \left(\frac{3}{10} \div 9\right)^{10} = \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{9}\right)^{10} = \left(\frac{1}{30}\right)^{10}$$

$$(3^5)^2 \div 7^{15} = 3^{10} \div 7^{15} = \left(\frac{3}{7}\right)^{15}$$

$$27^8 \div (0/3)^8 = \left(27 \div \frac{3}{10}\right)^8 = \left(27 \times \frac{10}{3}\right)^8 = 90^8$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^5 \div \left(-\frac{9}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{8} \times \frac{-4}{9}\right)^5 = \left(-\frac{1}{6}\right)^5$$

$$(0/36)^{10} \div (0/1)^{10} = \left(\frac{36}{100} \div \frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{36}{100} \times \frac{10}{1}\right)^{10} = \left(\frac{36}{10}\right)^{10} = (3/6)^{10}$$

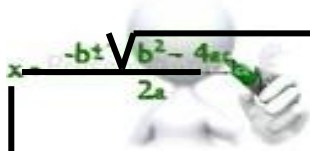
نکته ۲: در مثال های بالا اگر پایه ها بر هم بخش پذیر نبودند به صورت کسر می نویسیم.

$$3^5 \div 5^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

مثال:

نکته ۳: برای ساده کردن کسره های توان دار، ابتدا توان های مساوی یا پایه های مساوی را از هم جدا کرده، سپس حاصل هر کدام را بدست

می آوریم.



مثال: به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$\frac{10^5 \times 2^3}{2^6 \times 10^6} = \frac{10^5}{10^6} \times \frac{2^3}{2^6} = 10^{-1} \times \frac{1}{2^3} = \frac{10^{-1}}{2^3} = 5^{-3}$$

$$\frac{5^6 \times 6^3}{5^6 \times 6^5} = \frac{5^6}{5^6} \times \frac{6^3}{6^5} = 5^0 \times \frac{1}{6^2} = \frac{5^0}{6^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$$

$$\frac{3^6 \times 2^5}{2^{11} \times 3^8} = \frac{3^6}{3^8} \times \frac{2^5}{2^{11}} = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{2^6} = \frac{1}{6^6}$$

$$\frac{14^{12} \times 7}{7^5 \times 2^6} = \frac{(2 \times 7)^{12} \times 7}{7^5 \times 2^6} = \frac{2^{12} \times 7^{12} \times 7}{7^5 \times 2^6} = \frac{2^{12} \times 7^{13}}{2^6 \times 7^5} = \frac{2^{12}}{2^6} \times \frac{7^{13}}{7^5} = 2^6 \times 7^8 = 14^9$$

$$\frac{24^8 \times 3^3}{3^5 \times 8^8} = \frac{24^8}{8^8} \times \frac{3^3}{3^5} = 3^8 \times \frac{1}{3^2} = \frac{3^8}{3^2} = 3^6$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(2^8 \times 2^3) \times (16^6 \div 8^4) = 2^{11} \times 2^6 = 2^{17}$$

$$\left[(-36)^{-1} \div 9^{-1} \right] \div \left[(-4)^3 \times (-4)^2 \right] = (-4)^{-1} \div (-4)^5 = (-4)^{-6}$$

نکته ۴: برای مرتب کردن اعداد توان دار از کوچک به بزرگ، باید نخست مقدار هر کدام را بدست آورید.

مثال: اعداد زیر را از کوچک ترین به بزرگ ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید.

$$6^4, 15^{-1}, -4^3, (-1)^{15}, (-2)^8, \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$-4^3 = -64, (-1)^{15} = -1, \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}, 15^{-1} = \frac{1}{15}, (-2)^8 = 256, 6^4 = 1296$$

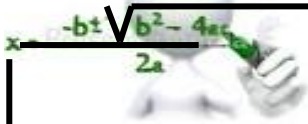
تمرینات کتاب درسی: ۷-۲-۲

تمرین ۱- حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$۱) \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times 3^4 =$$

$$۲) \frac{5^6 \times 6^3}{5^4 \times 6^5} =$$

$$۳) \frac{x^5 \times y^6}{x^5 \times y^3} =$$



تمرین ۲- عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید.

$$6^5, 1^{12}, -4^3, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

تمرین ۳- نصف 2^9 و ربع 4^7 را به صورت عددهای توان‌دار بنویسید.

نصف 2^9 =

ربع 4^7 =

۳-۲-۷- سوالات طبقه‌بندی شده:

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «×» مشخص کنید.

- ☐ الف) $a^b \div a^b$ برابر است با a^1 .
- ☐ ب) ربع عدد 2^7 برابر است با ۲.
- ☐ پ) نصف عدد 2^5 برابر است با 2^4 .
- ☐ ت) همواره داریم $a^n \div b^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n$.
- ☐ ث) همواره داریم $a^n \div a^m = a^{n+m}$.
- ☐ ج) حاصل $10^6 \div 10^4$ برابر است با 10^2 .
- ☐ ح) حاصل $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{7}{3}\right)^5$ برابر است با $\left(\frac{2}{7}\right)^5$.
- ☐ خ) در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر یکی از پایه‌ها را نوشته و توان اولی را با توان دومی جمع می‌کنیم.
- ☐ د) در تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی یکی از توان‌ها را نوشته و پایه اولی را بر پایه دومی تقسیم می‌کنیم.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف) $15^4 \div \square^4 = 3^4$ (الف)

ب) $2^6 \div 2^{\square} = 2^2$ (ب)

ت) $15^7 \div 5^7 = \frac{3^7 \times 5^7}{5^7} = \square$ (ت)

پ) $7^9 \div 7^{\square} = 7^5$ (پ)

ج) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\square} \div \left(\frac{3}{4}\right)^{\square} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$ (ج)

ث) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{\square} \div \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^9$ (ث)

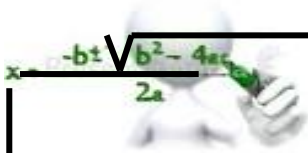
ح) نصف عدد 2^1 برابر است با (ح)

چ) ثلث عدد 9^5 برابر است با (چ)

خ) ربع عدد برابر است با 2^{10} . (خ)

د) در تقسیم اعداد توان‌دار با برابر یکی از پایه‌ها را نوشته و توان اولی را منهای توان دومی می‌کنیم.

ذ) در تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های برابر یکی از را نوشته و اولی را بر دومی تقسیم می‌کنیم.



۳- حاصل عبارت $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \div \left(\frac{2}{5}\right)^2$ برابر است با:

- ☐ الف) $\left(\frac{2}{5}\right)^8$ ☐ ب) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ ☐ ج) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ ☐ د) $\left(\frac{2}{5}\right)^1$

۴- نصف عبارت $2^9 \div 2^4$ برابر است با:

- ☐ الف) 2^2 ☐ ب) 2^3 ☐ ج) 2^4 ☐ د) 2^5

۵- حاصل عبارت $\frac{8^4 \times 8^6}{8^3}$ کدام گزینه است؟

- ☐ الف) 8^9 ☐ ب) 8^6 ☐ ج) 2^{11} ☐ د) گزینه الف و ج صحیح است

۶- نسبت 8^3 به 2^6 برابر است با:

- ☐ الف) ۸ ☐ ب) ۲ ☐ ج) ۳ ☐ د) ۴

۷- حاصل عبارت $\frac{8^2 \div 2^5}{2^3}$ کدام گزینه است؟

- ☐ الف) 2^0 ☐ ب) 2^1 ☐ ج) 2^2 ☐ د) 2^3

۸- در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی:

☐ الف) یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را جمع می‌کنیم.

☐ ج) یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را کم می‌کنیم.

☐ د) یکی از پایه‌ها را نوشته و توان دومی را از توان اولی کم می‌کنیم.

☐ ب) یکی از پایه‌ها را نوشته و توان اولی را از توان دومی کم می‌کنیم.

۹- در تقسیم اعداد توان‌دار با توان برابر:

☐ الف) یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را ضرب می‌کنیم.

☐ ج) یکی از توان‌ها را نوشته و پایه اولی را بر پایه دومی تقسیم می‌کنیم.

☐ د) یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را تقسیم می‌کنیم.

۱۰- ۸۱ برابر عدد $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۳ ☐ ب) ۹ ☐ ج) ۲۷ ☐ د) ۸۱

۱۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه حساب کنید.

الف) $\frac{5^8}{5^5} = \frac{5^5 \times 5^3}{5^5} = 5^3$

ب) $\frac{3^6}{3^2} =$

پ) $(-5)^9 \div (-5)^6 =$

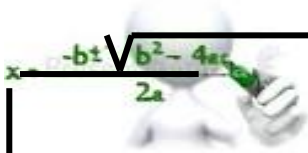
ت) $\left(\frac{-1}{7}\right)^5 \div \left(\frac{-1}{7}\right)^3 =$

ث) $2^{12} \div 2^7 =$

ج) $(-5/5)^4 \div (-5/5)^3 =$

چ) $a^5 \div a^3 =$

خ) $(xy)^{11} \div (xy)^9 =$



۱۲- خمس 5^{23} ضرب در نصف 2^{23} را به شکل توان دار بنویسید.

۱۳- $(125)^4$ برابر عدد $(5)^y$ چند است؟

۱۴- عدد 8^v چند برابر عدد 4^5 است؟

۱۵- حاصل عبارت $\frac{x^4 \times y^8}{x^2 \times y^3}$ را حساب کنید.

۱۶- حاصل عبارت های زیر را به شکل توان دار بنویسید.

الف) $8^5 \div 4^5 =$

ب) $(-5)^3 \div 2^3 =$

پ) $18^5 \div 6^5 =$

ت) $2^9 \div 8^9 =$

ث) $(-6)^{13} \div (2)^{13} =$

ج) $(-17)^4 \div (-2)^4 =$

چ) $(-14)^{20} \div (-7)^{20} =$

خ) $(\frac{2}{3})^9 \div (\frac{2}{3})^4 = (\frac{2}{3})^2$

۱۷- حاصل عبارت های زیر را تا حد امکان ساده کنید. در صورت امکان به صورت توان دار بنویسید.

الف) $\frac{a^5 y^3}{a^2 y} =$

ب) $\frac{(a^6 \div a^4)}{a \times a} =$

پ) $\frac{5 \cdot 8 \div 5 \cdot 5}{2^2 \times 25^2} =$

ت) $\frac{(x^3)^6 \div x^5}{x^8} =$

۱۸- حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $3^4 \times (4/4)^4 \div 1/2 =$

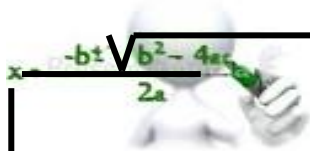
ب) $(3^7 \times 4^7) \div 12^2 =$

پ) $(6^7 \times 6^2) \div (2^4 \times 3^4) =$

ت) $(24^3 \div 2^3) \div (2 \times 2^2) =$

ث) $(7^5 \times 7^2) \div (21^3 \div 3^3) =$

ج) $(18 \div 2)^3 \times (3 \times 3)^3 =$



۱۹- اگر $2^9 = 512$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (مانند نمونه)

الف) $2^9 = 2^{10} \div 2 = 2^9 \Rightarrow 512 \div 2 = 256$

ب) $2^8 =$

پ) $2^7 =$

ت) $2^6 =$

۲۰- اگر $a=5$ و $b=6$ و $c=10$ باشد، مقدار مساحت کل و حجم را به دست آورید.

۳-۷- جذر تقریبی

۱-۳-۷- نکات درسی:

نکته ۱: جذر را با علامت $\sqrt{\quad}$ نشان می‌دهیم.

نکته ۲: جذر هر عدد همواره مقداری مثبت است، ولی ریشه‌های یک عدد همواره دو مقدار قرینه‌ی هم هستند.

مثال: جذر عددهای مقابل را بنویسید.

$$\sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}, \sqrt{100} = 10, \sqrt{144} = 12, \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$$

مثال: ریشه‌های عددهای ۸۱ و $\frac{4}{9}$ را مشخص کنید.

$$\frac{4}{9} \text{ ریشه‌های } = \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \quad \text{۹ و -۹ ریشه‌های ۸۱}$$

نکته ۳: برای محاسبه جذر تقریبی یک عدد ابتدا مشخص می‌کنیم عدد زیر رادیکال بین کدام دو مجذور کامل قرار دارد. سپس با جذر گرفتن

از آن دو عدد مشخص می‌شود که جذر داده شده بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد.

مثال: عدد $\sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

$$16 < 19 < 25 \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{19} < 5$$

$\sqrt{19}$ بین ۴ و ۵ قرار دارد.

مثال: عدد $\sqrt{77}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

$$64 < 77 < 81 \Rightarrow \sqrt{64} < \sqrt{77} < \sqrt{81} \Rightarrow 8 < \sqrt{77} < 9$$

$\sqrt{77}$ بین ۸ و ۹ قرار دارد.

اکنون بعد از مشخص کردن محدوده جذر خواسته شده، اگر عدد زیر رادیکال به مجذور کامل کوچک‌تر نزدیک بود در جدول از جذر عدد کوچک‌تر

شروع کرده و با اضافه کردن $(\frac{1}{10})$ ، جذر تقریبی را به دست می‌آوریم. ولی اگر به مجذور کامل بزرگ‌تر نزدیک‌تر بود، با کم کردن $(\frac{1}{10})$ از جذر

عدد بزرگ‌تر، جذر تقریبی را به دست می‌آوریم.

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{11}$ را به دست آورید.

$$9 < 11 < 16 \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4$$

چون ۱۱ به ۹ نزدیکتر است تا ۱۶ بنابراین جدول را از جذر کم شروع کرده و ۰/۱ به ۳ اضافه می‌کنیم و پیش می‌رویم تا در ردیف مجزورها به نزدیکترین عدد نسبت به ۱۱ برسیم.

عدد	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴
مجزور	۹/۶۱	۱۰/۲۴	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶

در نتیجه چون ۱۰/۸۹ از بقیه به ۱۱ نزدیکتر است پس $\sqrt{11} \approx 3/3$ می‌باشد.

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{60}$ را به دست آورید.

$$49 < 60 < 64 \Rightarrow \sqrt{49} < \sqrt{60} < \sqrt{64} \Rightarrow 7 < \sqrt{60} < 8$$

چون ۶۰ به ۶۴ نزدیکتر است بنابراین $\sqrt{60}$ به $\sqrt{64}$ یعنی عدد ۸ نزدیکتر است پس جدول را از ۷/۹ شروع کرده و (۰/۱) را به ترتیب از آن کم می‌کنیم.

عدد	۷/۹	۷/۸	۷/۷
مجزور	۶۲/۴۱	۶۰/۸۴	۵۹/۲۹

چون عدد ۶۰/۸۴ به ۶۰ نزدیکتر است. بنابراین: $\sqrt{60} \approx 7/8$

نکته ۴: برای مشخص کردن مقدار تقریب یک عدد روی محور، ابتدا مشخص می‌کنیم آن عدد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد و به کدام عدد نزدیک است سپس اگر از آن عدد بزرگتر بود سمت راست آن عدد و اگر از آن عدد کوچکتر بود سمت چپ آن عدد قرار می‌گیرد.
مثال: مقدار تقریبی عددهای زیر را روی محور مشخص کنید.

$$A = \sqrt{119}, B = \sqrt{140}, C = \sqrt{105}, D = \sqrt{111}$$

$\sqrt{119}$ به $\sqrt{121}$ نزدیکتر است و $\sqrt{119}$ سمت چپ ۱۱ قرار دارد

$$100 < 119 < 121 \rightarrow 10 < \sqrt{119} < 11 \rightarrow$$

$$121 < 140 < 144 \rightarrow 11 < \sqrt{140} < 12 \rightarrow$$

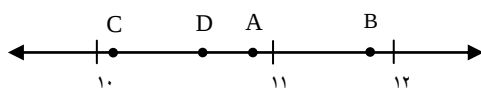
$\sqrt{140}$ به $\sqrt{144}$ نزدیکتر است و $\sqrt{140}$ سمت چپ ۱۲ قرار دارد

$$100 < 105 < 121 \rightarrow 10 < \sqrt{105} < 11 \rightarrow$$

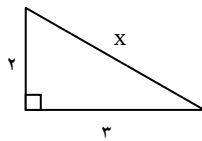
$\sqrt{105}$ به $\sqrt{100}$ نزدیکتر است و $\sqrt{105}$ سمت راست ۱۰ قرار دارد

$$100 < 111 < 121 \rightarrow 10 < \sqrt{111} < 11 \rightarrow$$

$\sqrt{111}$ به $\sqrt{121}$ نزدیکتر است و $\sqrt{111}$ سمت چپ ۱۱ قرار دارد



نکته ۵: در برخی مسائل نظیر مسائل فیثاغورس و یا پیدا کردن طول ضلع مربع از روی مساحت آن کاربرد جذر در هندسه استفاده شده است.



مثال: در شکل مقابل طول وتر را به طور تقریبی به دست آورید.

$$x^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$

$$9 < 13 < 16 \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$$

$\sqrt{13}$ به $\sqrt{16}$ نزدیکتر است در نتیجه به ۴ نزدیکتر است و از آن کوچکتر می باشد. پس جدول را از ۳/۹ شروع کرده و ۰/۱ را به ترتیب از آن کم می کنیم.

عدد	۳/۹	۳/۸	۳/۷	۳/۶
مجدور	۱۵/۲۱	۱۴/۴۴	۱۳/۶۹	۱۲/۹۶

$\Rightarrow \sqrt{13} \approx 3/6$

مثال: مساحت مربعی $\sqrt{89}$ می باشد. اندازه ضلع مربع را به صورت تقریبی به دست آورید.

$$a = \sqrt{89} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = \sqrt{89} \Rightarrow a = \sqrt{S} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = \sqrt{S} \Rightarrow S = a^2$$

$$81 < 89 < 100 \Rightarrow \sqrt{81} < \sqrt{89} < \sqrt{100} \Rightarrow 9 < \sqrt{89} < 10$$

$\sqrt{89}$ به $\sqrt{81}$ نزدیکتر است و از آن بزرگتر است. پس جدول را از ۹ شروع کرده و به ترتیب ۰/۱ به آن اضافه می کنیم.

عدد	۹/۱	۹/۲	۹/۳	۹/۴	۹/۵
مجدور	۸۲/۸۱	۸۴/۶۴	۸۶/۴۹	۸۸/۳۶	۹۰/۲۵

$\Rightarrow \sqrt{89} \approx 9/4$ طول ضلع مربع

نکته ۶: به منظور صرفه جویی در وقت برای محاسبه جذر تقریبی اعداد می توانیم فاصله ای را که جذر تقریبی در آن فاصله قرار دارد نصف

کرده و سپس به توان ۲ برسیانیم. مثلاً می خواهیم جذر تقریب $\sqrt{22}$ را محاسبه کنیم:

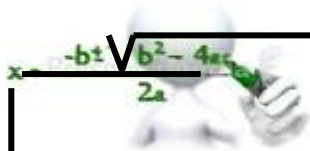
ابتدا مشخص می کنیم $\sqrt{22}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد:

$$16 < 22 < 25 \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{22} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{22} < 5$$

سپس فاصله ۴ تا ۵ را نصف می کنیم که می شود ۴/۵. اکنون ۴/۵ را به توان ۲ می رسانی و خواهیم داشت $(4/5)^2 = 20/25$ ، چون ۲۰/۲۵ از ۲۲ کوچکتر است پس از ۴/۵ شروع کرده و ۰/۱ به ترتیب به آن اضافه می کنیم.

عدد	۴/۵	۴/۶	۴/۷
مجدور	۲۰/۲۵	۲۱/۱۶	۲۲/۰۹

$\Rightarrow \sqrt{22} \approx 4/7$



مثال: جذر تقریبی $\sqrt{7}$ را به دست آورید.

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$$

اکنون فاصله بین ۲ و ۳ را نصف می‌کنیم که می‌شود ۲/۵. سپس ۲/۵ را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت $(2/5)^2 = 4/25$ و چون ۴/۲۵ از ۵ بزرگ‌تر است از ۲/۵ شروع کرده و ۰/۱ به ترتیب از آن کم می‌کنیم.

عدد	۲/۵	۲/۴
مجدور	۴/۲۵	۵/۱۶

$$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2/4$$

تمرین ۲-۳-۷- تمرینات کتاب درسی:

تمرین ۱- به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$$\sqrt{19} \approx$$

عدد	
مجدور	

$$\sqrt{40} \approx$$

عدد	
مجدور	

$$\sqrt{150} \approx$$

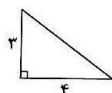
عدد	
مجدور	

$$\sqrt{385} \approx$$

عدد	
مجدور	

۳-۳-۷ سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.



- ☐ الف) $\sqrt{3}+$ بین ۵ و ۶ است.
☐ ب) همواره $\sqrt{18} > \sqrt{28}/2$.
☐ پ) ریشه دوم عدد ۷ بین ۲ و ۳ است.
☐ ت) $\sqrt{91}$ عددی بزرگ‌تر از $9/6$ است.
☐ ث) جذر تقریبی عدد ۲۹ بین ۴ و ۵ قرار دارد.
☐ ج) $\sqrt{52}$ عددی است که از $7/5$ کوچک‌تر است.
☐ چ) اندازه وتر مثلث قائم‌الزاویه مقابل برابر ۵ است.
☐ ح) جذر تقریبی اعداد منفی همواره عددی بین ۰ تا ۱ است.
☐ خ) اگر $\sqrt{49} < \sqrt{x} < \sqrt{36}$ باشد همواره $6 < x < 7$ خواهد بود.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴	۳/۵
۹	۹/۶۱	۱۰/۲۴	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶	۱۲/۲۵

- ☐ الف) $\sqrt{12} \approx$
☐ ب) $\sqrt{78} \approx 8/$
☐ پ) ۱۲- جذر
☐ ت) $\sqrt{52} < \dots < \dots$
☐ ث) ریشه دوم عدد یک برابر است.
☐ ج) حاصل $\sqrt{9+16}$ برابر است با
☐ چ) مجذور عدد برابر $2/25$ است.
☐ ح) حاصل $\sqrt{9+25}$ بین و است.
☐ خ) جذر تقریبی عدد ۳۷ تا یک رقم اعشار مساوی است.

۳- جذر عدد ۴۵ تا یک رقم اعشار برابر است با:

- ☐ الف) $6/6$ ☐ ب) $6/7$ ☐ ج) $6/8$ ☐ د) $6/9$

۴- جذر عدد ۱۹ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟

- ☐ الف) ۳ و ۴ ☐ ب) ۴ و ۵ ☐ ج) ۱ و ۲ ☐ د) ۵ و ۶

۵- جذر کدام یک از عددهای زیر تقریبی است؟

- ☐ الف) ۱۶ ☐ ب) $0/01$ ☐ ج) $0/36$ ☐ د) ۲۸

۶- جذر کدام عدد درست حساب نشده است؟

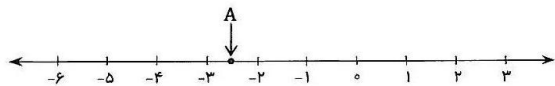
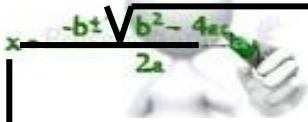
- ☐ الف) $\sqrt{25} = -5$ ☐ ب) $\sqrt{25} = +5$ ☐ ج) $\sqrt{17} = 4/1$ ☐ د) $-\sqrt{16} = -4$

۷- حاصل $\sqrt{13+7}$ بین چه اعدادی قرار می‌گیرد؟

- ☐ الف) ۳ و ۴ ☐ ب) ۴ و ۵ ☐ ج) ۵ و ۶ ☐ د) ۶ و ۷

۸- در عبارت $\sqrt{200} < \sqrt{196} < \square$ به جای $\square$ چه عددی قرار می‌گیرد؟

- ☐ الف) ۱۱ ☐ ب) ۱۲ ☐ ج) ۱۳ ☐ د) $\sqrt{225}$



۹- در روی محور، نقطه A چه عددی می تواند باشد؟

الف) $\sqrt{50}$ ☐ ب) $-\sqrt{11}$ ☐

ج) $\sqrt{11}$ ☐ د) $-\sqrt{7}$ ☐

۱۰- حاصل هر یک از اعداد زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

الف) $\sqrt{6} \approx$	ب) $\sqrt{15} \approx$
پ) $\sqrt{23} \approx$	ت) $\sqrt{59} \approx$
ث) $\sqrt{99} \approx$	ج) $\sqrt{109} \approx$

۱۱- باتوجه به جدول، به سؤال های خواسته شده پاسخ دهید.

عدد	۷	۷/۱	۷/۲	۷/۳	۷/۴	۷/۵	۷/۶	۷/۷	۷/۸	۷/۹	۸
مجدور	۴۹	۵۰/۴۱	۵۱/۸۴	۵۳/۲۹	۵۴/۷۶	۵۶/۲۵	۵۷/۷۶	۵۹/۲۹	۶۰/۸۴	۶۲/۴۱	۶۴

الف) $\sqrt{50}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟ آیا از نصف فاصله یعنی ۷/۵ کمتر است؟ حاصل تقریبی $\sqrt{50}$ چند است؟

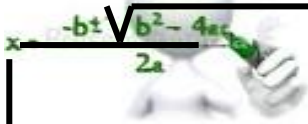
ب) $\sqrt{57}$ چطور؟

پ) $\sqrt{60}$ از نصف فاصله کمتر است یا خیر؟ جذر تقریبی آن چند است؟

ت) حاصل $\sqrt{50}$ و $\sqrt{57}$ و $\sqrt{60}$ را با ماشین حساب تا دو رقم اعشار حساب کنید و با پاسخ های بالا مقایسه کنید.

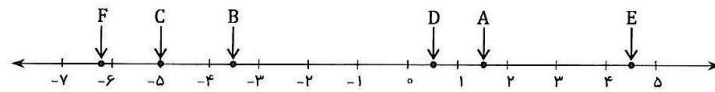
چه نتیجه ای می گیرید؟

۱۲- زمینی به شکل مربع و به مساحت ۲۳۰ متر مربع داریم. اندازه هر ضلع زمین را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

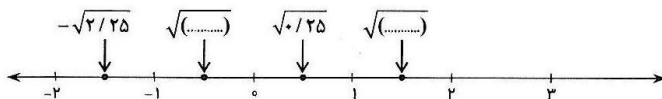


۱۳- هر یک از نقاط روی محور به کدام یک از اعداد داده شده می‌تواند متعلق باشد؟

$$-\sqrt{37}, \sqrt{2}, -\sqrt{11}, \sqrt{18}, -\sqrt{25}, +\sqrt{0/25}$$



۱۸۵- با توجه به محور داده شده جاهای خالی را با اعداد مناسب کامل کنید.



۴-۷- نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

۱-۴-۷- نکات درسی:

نکته ۱: برای مشخص کردن عدد رادیکالی روی محور اعداد مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

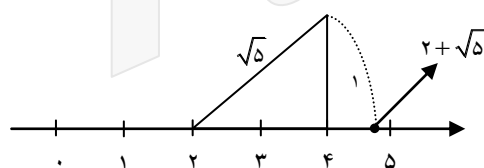
گام اول: نقطه شروع را مشخص می‌کنیم (عدد صحیحی که همراه عدد رادیکالی می‌آید)

گام دوم: جهت رسم مثلث قائم الزاویه را مشخص می‌کنیم (علامت + پشت رادیکال سمت راست و علامت - پشت رادیکال سمت چپ)

گام سوم: دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع مجذورهای آنها با عدد زیر رادیکال مساوی باشد (اضلاع مثلث قائم الزاویه)

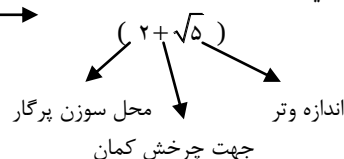
گام چهارم: دهانهٔ پرگار را به اندازه وتر مثلث باز کرده، سوزن پرگار را روی نقطه شروع قرار داده و کمان می‌زنیم.

گام پنجم: محل برخورد کمان با محور جای عدد خواسته شده است.



مثال: جای عدد $2 + \sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

گام اول: نقطه شروع = ۲



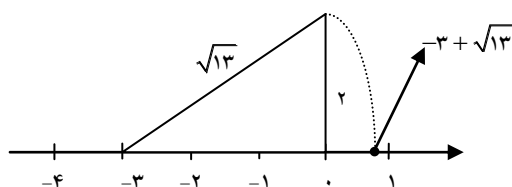
گام دوم: جهت رسم مثلث سمت + (راست)

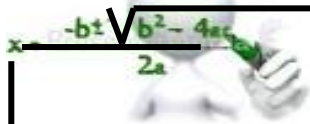
گام سوم: ضلع‌های مثلث = ۲ و ۱ ($1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$)

مثال: جای عدد $\sqrt{13} - 3$ را روی محور مشخص کنید.

توجه: $\sqrt{13} - 3 = -3 + \sqrt{13}$ می‌باشد.

گام اول: نقطه شروع = ۳

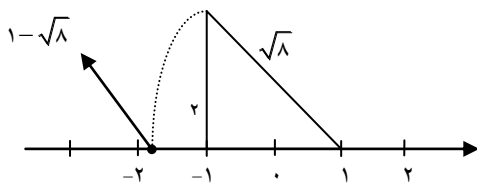




گام دوم: جهت رسم مثلث = سمت + (راست)

گام سوم: ضلع‌های مثلث = ۳ و ۲ (۱۳ = ۹ + ۴ = ۳² + ۲²)

مثال: نقطه $1 - \sqrt{8}$ را روی محور مشخص کنید.

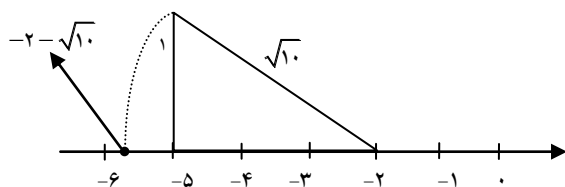


گام اول: نقطه شروع = ۱

گام دوم: جهت رسم مثلث = سمت - (چپ)

گام سوم: ضلع‌های مثلث = ۲ و ۲ (۸ = ۴ + ۴ = ۲² + ۲²)

مثال: نقطه $-2 - \sqrt{10}$ را روی محور مشخص کنید.

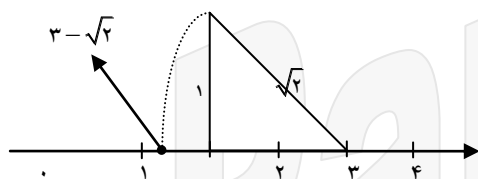


گام اول: نقطه شروع = -۲

گام دوم: جهت رسم مثلث = سمت - (چپ)

گام سوم: ضلع‌های مثلث = ۳ و ۱ (۱۰ = ۹ + ۱ = ۳² + ۱²)

مثال: نقطه $3 - \sqrt{2}$ را روی محور مشخص کنید.



گام اول: نقطه شروع = ۳

گام دوم: جهت رسم مثلث = سمت - (چپ)

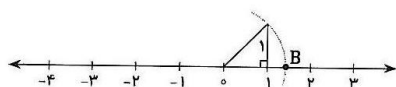
گام سوم: ضلع‌ها مثلث = ۱ و ۱ (۲ = ۱ + ۱ = ۱² + ۱²)

۳-۴-۲- تمرینات کتاب درسی

تمامی تمرینات این بخش در داخل کتاب حل می‌شود.

۳-۴-۲- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.



الف) عدد $\sqrt{2}$ بین ۱ و ۲ قرار دارد. ☐

ب) $2 + \sqrt{5}$ بین ۲ و ۳ قرار دارد. ☐

پ) در محور مقابل، نقطه B نشان‌دهنده عدد $-\sqrt{2}$ است. ☐

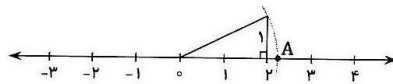
ت) وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۲ و یک برابر $\sqrt{5}$ است. ☐

ث) $1 + \sqrt{2}$ همواره در سمت چپ (منفی) محور قرار می‌گیرد. ☐

ج) برای رسم عدد $\sqrt{2}$ باید یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم یک داشته باشیم که وتر آن $\sqrt{2}$ باشد. ☐

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.



الف) $\sqrt{56}$ بین و است.

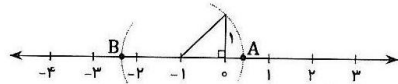
ب) در شکل مقابل A نمایش عدد است.

پ) $-2 + \sqrt{5}$ بین و قرار دارد.

ت) $(\sqrt{17} - 1)$ بین دو عدد و قرار دارد.

ث) با توجه به دو عدد $\sqrt{5}$ و $\frac{7}{4}$ عدد کوچک‌تر است.

ج) وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که هر ضلع قائم آن یک باشد برابر است.



چ) در شکل مقابل نقطه A نمایش عدد و نقطه B نمایش عدد است.

ح) وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک ضلع قائم ۲ و یک ضلع قائم ۱ داشته باشد، مساوی است.

۳- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از $\sqrt{14}$ وجود دارد؟

☐ الف) ۲

☐ ب) ۳

☐ ج) ۴

☐ د) ۵

۴- در شکل زیر نقطه A نمایش چه عددی است؟

☐ الف) $\sqrt{2}$

☐ ب) $1 + \sqrt{2}$

☐ ج) $2 + \sqrt{2}$

☐ د) $-\sqrt{2}$

۵- $-\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد زیر قرار دارد؟

☐ الف) ۰ و ۱

☐ ب) ۰ و -۱

☐ ج) ۱ و ۲

☐ د) -۱ و -۲

۶- در شکل زیر نقطه B نمایش چه عددی است؟

☐ الف) $-\sqrt{5}$

☐ ب) $-1 + \sqrt{5}$

☐ ج) $1 + \sqrt{5}$

☐ د) $1 - \sqrt{5}$

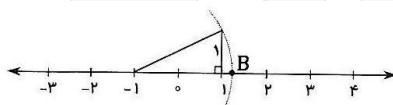
۷- چند عدد صحیح کوچک‌تر از $\sqrt{19}$ وجود دارد؟

☐ الف) ۸

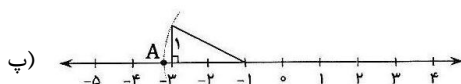
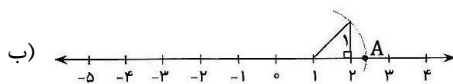
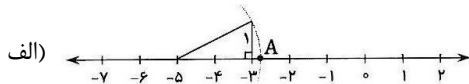
☐ ب) ۹

☐ ج) ۴

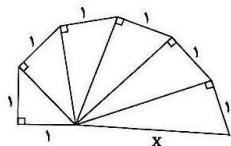
☐ د) بی‌شمار



۸- در هر یک از شکل‌های زیر نقطه A نمایش چه عددی است؟

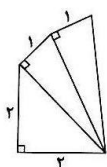


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



۹- ابتدا مقدار x را به دست آورید سپس محیط شکل مقابل را حساب کنید.

۱۰- مساحت شکل زیر را حساب کنید.



۵-۷- خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

۱-۵-۷- نکات درسی:

نکته ۱: جذر حاصل ضرب یا تقسیم دو عدد با حاصل ضرب یا تقسیم جذر هر یک از آنها مساوی می‌باشد.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$$

مثال: حاصل تساوی‌های زیر را بدست آورید.

$$۱) \sqrt{400} = \sqrt{100 \times 4} = 10 \times 2 = 20$$

$$۲) \sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$$

$$۳) \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$$

$$۴) \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

$$۵) \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25}$$

$$۶) \sqrt{16 \times 81} = \sqrt{16} \times \sqrt{81} = 4 \times 9 = 36$$

$$۷) \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$۸) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$۹) \sqrt{\frac{4 \times 36}{49}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{2 \times 6}{7} = \frac{12}{7}$$

$$۱۰) \sqrt{\frac{100}{9 \times 25}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9} \times \sqrt{25}} = \frac{10}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

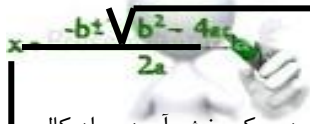
نکته ۲: تساوی‌های ضرب و تقسیم رادیکال‌ها در مورد جمع و تفریق برقرار نمی‌باشد.

$$(\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b})$$

مثال:

$$\begin{cases} \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \\ \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{100} - \sqrt{49} = 10 - 7 = 3 \\ \sqrt{100-49} = \sqrt{51} \approx 7.14 \end{cases}$$



❖ نکته ۳: در بعضی از رادیکال‌ها وقتی به صورت ضرب نوشته می‌شوند، یک بخش آن از زیر رادیکال خارج می‌شود و یک بخش آن زیر رادیکال باقی می‌ماند.

مثال: عبارات رادیکالی زیر را ساده کنید.

$$۱) \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$۲) \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$۳) \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$۴) \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$۵) \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$۶) \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

❖ نکته ۴: برای نوشتن عددهای بین دو عدد رادیکالی نخست مشخص می‌کنیم که هر عدد رادیکالی بین کدام دو عدد صحیح قرار دارند سپس از روی آن‌ها حدود قرار گرفتن اعداد را مشخص می‌کنیم.

مثال: غلامرضا می‌خواهد بداند بین $\sqrt{40}$ و $\sqrt{7}$ چند عدد طبیعی وجود دارد. او را راهنمایی کنید.

از آنجایی که $۳ < \sqrt{7} < ۲$ ، $۶ < \sqrt{40} < ۷$ می‌باشند بنابراین عددهای بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از ۷ پاسخ سؤال هستند، یعنی اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶.

❖ نکته ۵: برای محاسبه جذر اعداد خیلی بزرگ با تبدیل آن به حاصلضرب دو عدد، آن را به دو عدد کوچک‌تر تبدیل می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt{1200}$ را بدست آوریم:

$$\sqrt{1200} = \sqrt{100 \times 12} = 10 \times \sqrt{12} = 10 \times 3/5 = 35$$

اکنون توضیح می‌دهیم که $\sqrt{12} \approx 3/5$ را از کجا به دست آورده‌ایم:

$$۹ < ۱۲ < ۱۶ \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16} \Rightarrow ۳ < \sqrt{12} < ۴$$

فاصله بین ۳ و ۴ را نصف می‌کنیم که برابر ۳/۵ می‌باشد و از آنجایی که $(3/5)^2 = 12/25$ می‌باشد و از ۱۲ بزرگ‌تر است، باید از ۳/۵ شروع کرده و به ترتیب (۰/۱) از آن کم کنیم:

عدد	۳/۵	۳/۴
مجدور	۱۲/۲۵	۱۱/۵۶

$$\Rightarrow \sqrt{12} \approx 3/5$$

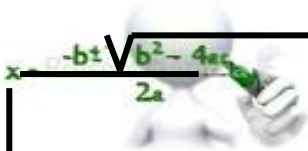
اکنون اگر بخواهیم جذر $\sqrt{1200}$ را تا یک رقم اعشار بدست آوریم باید فاصله بن ۳/۴ و ۳/۵ را نیز نصف کنیم یعنی ۳/۴۵ را به توان ۲ برسانیم که خواهیم داشت: $(3/45)^2 = 11/9025$ که چون از ۱۲ کوچک‌تر است از ۳/۴۵ شروع کرده و به اندازه (۰/۱) به ترتیب به آن اضافه می‌کنیم.

عدد	۳/۴۵	۳/۴۶	۳/۴۷
مجدور	۱۱/۹۰۲۵	۱۱/۹۷۱۶	۱۲/۰۴۰۹

$$\Rightarrow \sqrt{12} \approx 3/46$$

$$\sqrt{1200} = \sqrt{100 \times 12} = 10 \times \sqrt{12} \approx 10 \times 3/46 = 34/6$$

جذر تقریبی $\sqrt{1200}$ تا یک رقم اعشار



مثال: جذر تقریبی $\sqrt{600}$ را تا یک رقم اعشار محاسبه کنید.

$$\sqrt{600} = \sqrt{100 \times 6} = 10\sqrt{6}$$

اکنون باید جذر تقریبی ۶ را تا دو رقم اعشار بدست آوریم.

$$4 < 6 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$$

اکنون فاصله بین ۲ و ۳ را نصف می‌کنیم که می‌شود $2/5$ و آن را به توان ۲ می‌رسانیم.

$(2/5)^2 = 6/25$ اکنون چون $6/25$ از ۶ بزرگ‌تر است از $2/5$ شروع کرده و به ترتیب $(0/1)$ از آن کم می‌کنیم:

عدد	۲/۵	۲/۴
مجذور	۶/۲۵	۵/۷۶

$$\Rightarrow \sqrt{6} \approx 2/4$$

اکنون از آنجایی که $\sqrt{6}$ بین $2/4$ و $2/5$ قرار دارد این فاصله را نصف می‌کنیم و توان ۲ می‌رسانیم $(2/45)^2 = 6/1025$ و چون از $\sqrt{6}$ بزرگ‌تر است از $2/45$ شروع کرده و به ترتیب $0/1$ از آن کم می‌کنیم.

عدد	۲/۴۵	۲/۴۴
مجذور	۶/۰۰۲۵	۵/۹۵۳۶

$$\Rightarrow \sqrt{6} \approx 2/45$$

$$\sqrt{600} = \sqrt{100 \times 6} = 10 \times \sqrt{6} = 10 \times 2/45 = 24/5$$

جذر $\sqrt{600}$ تا یک رقم اعشار

۳-۲-۵-۷- تمرینات کتاب درسی

تمرین ۱- جذر ۷۰۰ را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین حساب بررسی کنید.

۳-۵-۷- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

☐ الف) حاصل $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} \neq \sqrt{\frac{75}{3}}$

☐ ب) حاصل $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ برابر است با ۶.

☐ پ) $\sqrt{9+16}$ برابر است با $\sqrt{25}$.

☐ ت) حاصل $\sqrt{5 \times 20}$ برابر است با $\sqrt{100}$.

☐ ث) حاصل $\sqrt{45} \div \sqrt{5} = \sqrt{45 \div 5} = \sqrt{9}$.

☐ ج) در ضرب دو عدد رادیکالی نمی‌توان جدا جدا جذر گرفت.

☐ چ) در تقسیم اعداد رادیکالی می‌توان جدا جدا جذر گرفته سپس حاصل جذرها را تقسیم کرد.

☐ ح) در ضرب اعداد رادیکالی می‌توان ابتدا دو عدد را در هم ضرب کرده سپس جذر بگیریم.

۲- حاصل $\sqrt{2} \times \sqrt{22}$ برابر است با:

- ☐ الف) ۱۲ ☐ ب) $\sqrt{12}$ ☐ ج) $\sqrt{144}$ ☐ د) الف و ج صحیح است

۳- کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- ☐ الف) $\sqrt{36 \times 25} = 30$ ☐ ب) $\sqrt{100} \times \sqrt{4} = 20$ ☐ ج) $\sqrt{50} \times \sqrt{2} = 25$ ☐ د) $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = 6$

۴- حاصل عبارت $\sqrt{3 \times 36}$ کدام است؟

- ☐ الف) $6\sqrt{3}$ ☐ ب) $3\sqrt{6}$ ☐ ج) $\sqrt{106}$ ☐ د) گزینه الف و ج صحیح است

۵- عبارت $\sqrt{34}$ معادل کدام عبارت است؟

- ☐ الف) $\sqrt{2 \times 17}$ ☐ ب) $\sqrt{1 \times 34}$ ☐ ج) $\sqrt{2} \times \sqrt{17}$ ☐ د) هر سه مورد

۶- کدام یک از عبارت‌های زیر درست حساب شده است؟

- ☐ الف) $\sqrt{75} = 3\sqrt{5}$ ☐ ب) $\sqrt{75} = \sqrt{3} \times \sqrt{25}$ ☐ ج) $\sqrt{50} = 25$ ☐ د) $\sqrt{50} = 2\sqrt{5}$

۷- حاصل $\sqrt{200} \div \sqrt{2}$ برابر است با:

- ☐ الف) ۲۰ ☐ ب) ۱۰ ☐ ج) ۸ ☐ د) ۳۰

۸- عبارت $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}}$ با کدام عبارت برابر است؟

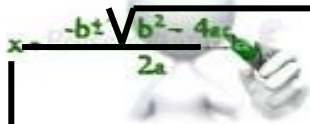
- ☐ الف) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}}$ ☐ ب) $\frac{5}{8}$ ☐ ج) $\frac{10}{8}$ ☐ د) هر سه مورد

۹- قرینه حاصل $\sqrt{\frac{1}{9}}$ کدام است؟

- ☐ الف) $\frac{1}{3}$ ☐ ب) $\frac{1}{9}$ ☐ ج) $-\frac{1}{3}$ ☐ د) $-\frac{1}{9}$

۱۰- با عددهای داده شده برای a و b جدول زیر را کامل کنید.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$a \times b$	$\sqrt{ab}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$
۲۵	۳۶	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$	۹۰۰	$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{900} = 30$	$\sqrt{25} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30$
۴	۹					
۱۶	۴					
۱	۴۹					
۴	۲۵					



۱۱- جدول زیر را مانند نمونه حل شده کامل کنید.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	a + b	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$
۹	۱۶	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	۲۵	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4=7$
۳۶	۶۴					
۱۴۴	۲۵					

۱۲- در هر یک از تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید. (مانند نمونه)

الف) $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{28} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad} = \quad$

پ) $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \quad = \quad$

ت) $\sqrt{2} \times \sqrt{450} = \quad = \quad$

ث) $\sqrt{34} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad}$

ج) $\sqrt{49 \times 36} = \quad \times \quad = \quad$

چ) $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \quad = \quad$

ح) $\sqrt{200} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad} = 10\sqrt{\quad}$

۱۳- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\sqrt{100 \times 64} =$

ب) $\sqrt{3} \times \sqrt{27} =$

پ) $\sqrt{9 \times 25} =$

ت) $\sqrt{2} \times \sqrt{18} =$

ث) $\sqrt{5} \times \sqrt{20} =$

ج) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} =$

چ) $\sqrt{128} \times \sqrt{2} =$

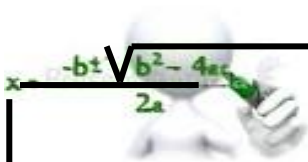
ح) $\sqrt{9 \times 25 \times 36} =$

خ) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{4} =$

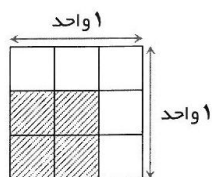
د) $\sqrt{5} \times \sqrt{125} =$

۱۴- برای عددهای داده شده a و b جدول زیر را کامل کنید و جواب‌ها را با هم مقایسه کنید.

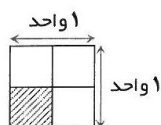
a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	a ÷ b	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
۱۶	۴	۴	۲	۲	$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$
۱۰۰	۲۵					
۹	۳۶					
۹۰۰	۱۰۰					



۱۵- با توجه به شکل درستی رابطه $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ را بررسی کنید.



۱۶- با توجه به شکل درستی رابطه $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ را بررسی کنید.



۱۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف) $\sqrt{\frac{121}{81}} =$

ب) $\sqrt{\frac{49}{144}} =$

پ) $\frac{\sqrt{25}}{36} =$

ت) $\frac{9}{\sqrt{16}} =$

@riazicafe

۸-۱- دسته بندی داده‌ها

۸-۱-۱- نکات درسی:

❖ نکته ۱: علم جمع آوری، سازمان دهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده‌ها)، علم آماری می‌باشد.

❖ نکته ۲: داده‌های داخل هر مسئله آماری را «داده‌های آماری» می‌نامند. به عبارت دیگر «اطلاعات عددی» همان داده‌ها هستند.

❖ نکته ۳: برای دسترسی سریع‌تر و آسان‌تر به اطلاعات یک مسئله آماری، آن‌ها را در جدولی به نام «جدول داده‌های آماری» و دسته بندی می‌کنیم.

❖ نکته ۴: فاصله بین کم‌ترین و بیش‌ترین داده‌های هر مسئله آماری «دامنه تغییرات» نام دارد. مثلاً در نمره‌های درس ریاضی یک کلاس دامنه تغییرات از ۰ تا ۲۰ می‌باشد.

❖ نکته ۵: منظور از «دسته» فاصله مساوی از داده‌های آماری است که در تعداد مختلف ایجاد می‌شود. مثلاً در نمره‌های درس ریاضی یک کلاس ۰ تا ۵، ۵ تا ۱۰، ۱۰ تا ۱۵، ۱۵ تا ۲۰ می‌توانند دسته بندی باشند.

❖ نکته ۶: تعداد داده‌های موجود در هر دسته «فراوانی» آن دسته نامیده می‌شوند که آن را با عدد نمایش می‌دهیم.

❖ نکته ۷: منظور از «خط نشان» تعداد داده‌های موجود در هر دسته می‌باشد که آن را با «چوب خط» نمایش می‌دهیم.

مثال: نمره‌های درس ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره به شرح زیر می‌باشد. جدول داده‌های آماری آن را در چهار دسته تقسیم کنید.

۱۰/۵ و ۱۷ و ۲ و ۲۰ و ۱۲ و ۱۹ و ۱۴ و ۸ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۰ و ۹ و ۱۴/۵ و ۱۳ و ۱۲/۵ و ۱۱

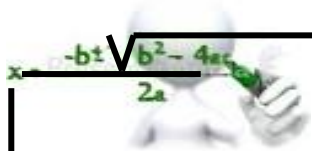
فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
۱	/	$0 \leq x < 5$
۲	//	$5 \leq x < 10$
۷	/// //	$10 \leq x < 15$
۶	/// /	$15 \leq x \leq 20$
۱۶	-	جمع

❖ نکته ۸: پس از جمع آوری و دسته بندی اطلاعات در یک جدول، می‌توان آن‌ها را در یک نمودار به نمایش گذاشت تا نتایج حاصل شده روشن‌تر و ساده‌تر ارائه شوند.

❖ نکته ۹: از نمودار ستونی برای مقایسه تعداد داده‌ها استفاده می‌شود.

❖ نکته ۱۰: از نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در مدتی مشخص استفاده می‌شود.

❖ نکته ۱۱: از نمودار تصویری برای مقایسه داده‌های تقریبی استفاده می‌شود.

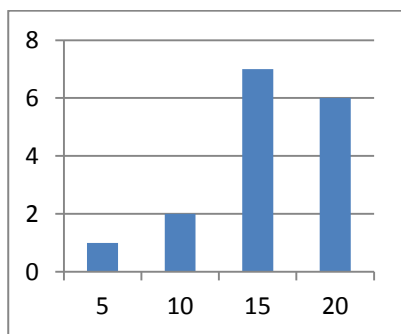


نکته ۱۲: از نمودار دایره‌ای برای نشان دادن تعداد یا درصد داده‌ها نسبت به کل داده‌ها استفاده می‌شود.

نکته ۱۳: نمودار ستونی (بلوکی) از دو محور عمود بر هم تشکیل می‌شود که روی محور افقی «حدود دسته‌ها» و روی محور عمودی «فراوانی»

نوشته می‌شود. سپس از حدود هر دسته، مستطیلی تا فراوانی مربوط به آن دسته رسم می‌شود.

مثال: نمودار مستطیلی (بلوکی) مربوط به مثال قبل را رسم می‌کنیم.

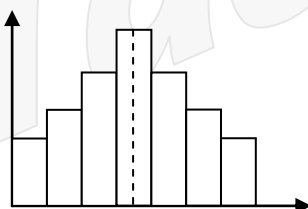


نکته ۱۴: در رسم نمودار مستطیلی، اگر بلوک‌ها قرینه یکدیگر رسم شوند، نمودار را متقارن می‌نامند.

نکته ۱۵: در نمودار بلوکی متقارن، میانگین داده‌ها در دسته وسط قرار می‌گیرد.

نکته ۱۶: اگر نمودار بلوکی متقارن باشد در اصطلاح می‌گویند داده‌ها به صورت «طبیعی یا نرمال» توزیع شده‌اند.

مثال: نمونه‌ای از یک نمودار مستطیلی متقارن با توزیع نرمال



میانگین

مثال: جدول مقابل میزان تولید شیر دام‌های یک دامداری را نمایش می‌دهد.

فراوانی	حدود دسته‌ها
۱	$0 \leq x < 10$
۳	$10 \leq x < 20$
۷	$20 \leq x < 30$
۱۰	$30 \leq x < 40$
۱۸	$40 \leq x < 50$
۱۵	$50 \leq x \leq 60$

الف) نمودار ستونی جدول آماری را رسم کنید.

ب) بیشترین مقدار شیر مربوط به کدام دسته است؟

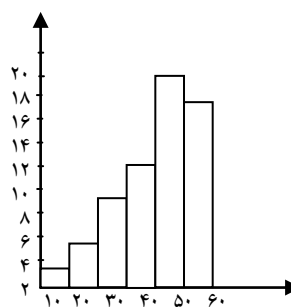
پ) آیا نمودار متقارن است؟

ت) آیا نمودار توزیع طبیعی دارد؟

ث) این دامداری چند رأس دارد؟

پاسخ:

الف: نمودار

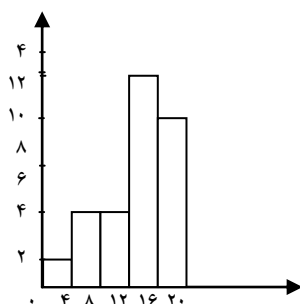


ب) $40 \leq x < 50$ (تولید بین ۴۰ تا ۵۰ لیتر شیر)

پ) خیر

ث) خیر

ت) تعداد دامها $1+3+7+10+18+15=54$



مثال: با توجه به نمودار مقابل:

الف) این کلاس چند دانش آموز دارد؟

ب) بیشترین تعداد در کدام دسته قرار دارند؟

پ) کمترین تعداد در کدام دسته قرار دارند؟

ت) آیا نمودار متقارن است؟

ث) آیا وضعیت درس ریاضی در کلاس مناسب است؟

پاسخ:

الف) تعداد کلاس $2+4+4+12+10=32$

ب) $12 \leq x < 16$ (نمرات بین ۱۲ تا ۱۶)

ت) خیر.

مثال: نسرین می‌خواهد جدول داده‌های مسئله آماری زیر را که مربوط به قد دانش آموزان یک کلاس می‌باشد تشکیل دهد، او را راهنمایی کنید.

۱۷۲ و ۱۴۹ و ۱۵۹ و ۱۴۳ و ۱۵۵ و ۱۷۹ و ۱۷۰ و ۱۴۷ و ۱۵۷ و ۱۳۳ و ۱۵۵ و ۱۶۹ و ۱۳۵ و ۱۵۴

پاسخ: کمترین داده ۱۳۲ و بیشترین داده ۱۷۹ می‌باشد. بنابراین بهتر است دسته‌ها را ده تایی انتخاب کنیم.

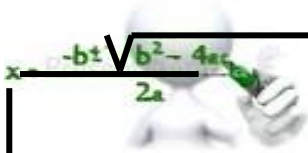
توجه: برای تعیین طول یا محدوده دسته‌ها از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}}$$

$$\text{دامنه تغییرات} = 179 - 131 = 48 \approx 50$$

$$\text{طول دسته} = \frac{50}{5} = 10$$

حدود دسته‌ها	خط نشان	فراوانی
$120 \leq x < 140$	///	۳
$140 \leq x < 150$	///	۳
$150 \leq x < 160$	////	۵
$160 \leq x < 170$	/	۱
$170 \leq x < 180$	///	۳



۳-۱-۸- تمرینات کتاب درسی

تمرین- نمره‌های ریاضی دانش آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات، آنها را به ۵ دسته مساوی تقسیم بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار ستونی را رسم کنید و با توجه به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید.

۸/۵ و ۱۱ و ۱۶/۵ و ۱۵/۵ و ۱۷ و ۱۸/۵ و ۱۹ و ۱۴ و ۱۵ و ۸ و ۹ و ۱۳ و ۱۱ و ۱۴ و ۱۳/۵ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۲/۵ و ۹/۵ و ۱۵ و ۱۸ و ۱۶ و ۲۰ و ۱۲/۵ و ۶ و ۱۴ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۵ و ۱۱/۵ و ۱۰/۵ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۳ و ۵ و ۷

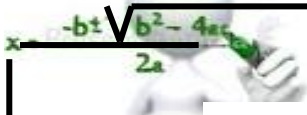
تمرین- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه‌گیری شده است. داده‌ها را به ۵ دسته تقسیم کنید و جدول فراوانی و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

۱۵۹ و ۱۶۷ و ۱۶۸ و ۱۶۳ و ۱۷۱ و ۱۶۱ و ۱۵۷ و ۱۵۸ و ۱۶۳ و ۱۷۲ و ۱۶۸ و ۱۵۷ و ۱۵۴ و ۱۵۷ و ۱۶۱ و ۱۶۳ و ۱۶۵ و ۱۵۹ و ۱۵۶ و ۱۵۶ و ۱۶۵ و ۱۵۸ و ۱۶۹ و ۱۵۳ و ۱۷۰ و ۱۶۹ و ۱۵۷ و ۱۵۸ و ۱۵۳ و ۱۵۲

۳-۱-۸- سؤالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

- | | |
|--|--|
| ☐ الف) عدد ۵ مربوط به دسته $1 \leq x < 5$ است. | ☐ ب) دامنه تغییرات داده‌های ۴، ۹، ۸- و ۱۵ برابر ۲۳ است. |
| ☐ پ) در دسته $4 \leq x \leq 8$ حد پایین برابر ۴ است. | ☐ ت) به فاصله بین کم‌ترین و بیش‌ترین داده فراوانی گفته می‌شود. |
| ☐ ث) طول دسته $20.5 < x \leq 142$ برابر ۱۳ می‌باشد. | ☐ ج) تعداد داده‌های موجود در یک دسته را فراوانی آن دسته می‌گویند. |
| ☐ چ) نمودار تصویری برای مقایسه تعداد به‌کار می‌رود. | ☐ ح) مجموع کم‌ترین داده و بزرگ‌ترین داده را دامنه تغییرات می‌گویند. |
| ☐ خ) نمودار ستونی برای مقایسه داده‌های تقریبی به‌کار می‌رود. | ☐ د) اگر دامنه تغییرات را بر تعداد تقسیم کنیم، طول هر دسته به‌دست می‌آید. |
| ☐ ذ) اگر طول دسته‌ای برابر ۵ و حد پایین آن ۲ باشد، حد بالای آن برابر ۷ است. | |



- ☐ ر) برای نشان دادن تعداد داده‌ها نسبت به کل از نمودار دایره‌ای استفاده می‌کنیم.
- ☐ ز) اگر تعداد داده‌های جمع‌آوری شده در آمار زیاد باشند، داده‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم.
- ☐ ژ) اگر طول دسته را در تعداد دسته ضرب کنیم، دامنه تغییرات داده‌ها به دست می‌آید.
- ☐ س) نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص استفاده می‌شود.
- ☐ ش) اگر بزرگ‌ترین داده را منهای کوچک‌ترین داده کنیم، دامنه تغییرات به دست می‌آید.
- ☐ ص) اگر $|||$ نمایش چوب خط یک دسته باشد، آن‌گاه فراوانی این دسته برابر با ۱۵ است.
- ☐ ض) اگر به تمام داده‌های یک مجموعه آماری یک واحد اضافه کنیم دامنه تغییرات تغییر نمی‌کند.
- ☐ ط) اگر ۵ داده در دسته $135 < x \leq 125$ قرار گرفته باشد، آن‌گاه نمایش چوب خط به صورت $|||$ و فراوانی برابر ۱۰ می‌باشد.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- الف) طول دسته $9 < x \leq 5$ برابر است با
ب) با تقسیم دامنه تغییرات بر تعداد دسته‌ها به دست می‌آید.
پ) برای مقایسه تعداد از نمودار استفاده می‌کنیم.
ت) مجموع در هر جدول آماری همان تعداد کل داده‌ها می‌باشد.
ث) طول دسته حاصل تقسیم بر می‌باشد.
ج) تعداد داده‌های موجود در یک دسته را آن دسته می‌گویند.
چ) برای مقایسه داده‌های تقریبی از نمودار استفاده می‌کنیم.
ح) علم آمار علم و سازمان‌دهی و تحلیل و تفسیر داده‌ها می‌باشد.
خ) در یک جدول آماری عدد مربوط به چوب خط همان دسته می‌باشد.
د) اختلاف حد بالای هر دسته و حد پایین همان دسته دسته نامیده می‌شود.
ذ) نمودار برای نشان دادن تغییرات دمای شهر در یک ماه استفاده می‌شود.
ر) در دسته $5 < x \leq 3$ حد پایین دسته برابر و حد بالای دسته برابر است.
ز) اگر تمام داده‌های یک مجموعه آماری را سه برابر کنیم، دامنه تغییرات
ژ) عدد مناسب داخل $\square$ در دسته $4 \leq x < \square$ برابر است. (طول دسته برابر ۸ است)
س) اگر از تمام داده‌های یک مجموعه آماری، ۴ واحد کم کنیم دامنه تغییرات
ش) دسته $20 \leq x \leq 17$ یعنی اعدادی که از ۱۷، یا و از ۲۰، یا هستند.
ص) نمودارهای و به ترتیب برای نشان دادن تعداد دسته‌ها نسبت به کل و مقایسه داده‌های تقریبی استفاده می‌شود.
ض) اگر ۷ داده در دسته $20 \leq x \leq 5$ قرار داشته باشد، آن‌گاه نمایش چوب خط به صورت و فراوانی برابر است.

۳- دامنه تغییرات داده‌های ۴، ۱۸، ۲۸، ۳/۵، ۴۲ و ۴۱ برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۳۸ ☐ ب) ۳۸/۵ ☐ ج) ۳۹ ☐ د) ۳۹/۵

۴- دامنه تغییرات داده‌های ۶، ۱۲، ۳۰، ۱، ۳۲ و ۴۱ برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۳۵ ☐ ب) ۳۷/۵ ☐ ج) ۴۰ ☐ د) ۳۸

۵- دامنه تغییرات داده‌های ۷، -۲، -۷، +۳، ۱۰ و -۱ برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۱۰ ☐ ب) ۱۵ ☐ ج) ۱۷ ☐ د) ۷

۶- دامنه تغییرات ۱۰ داده برابر ۸ می‌باشد، اگر تمام داده‌ها را دو برابر کنیم، دامنه تغییرات:

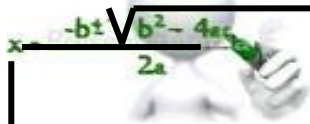
- الف) تغییر نمی‌کند ب) دو برابر می‌شود ج) نصف می‌شود د) نمی‌توان حساب کرد

۷- اگر نمایش چوب خط یک دسته به صورت $|||$ باشد، فراوانی آن دسته برابر است با:

- ☐ الف) ۶ ☐ ب) ۷ ☐ ج) ۸ ☐ د) ۹

۸- حدود کدام دسته زیر برابر ۴ است؟

- ☐ الف) $1 \leq x < 2$ ☐ ب) $-2 \leq x < -6$ ☐ ج) $0 \leq x < 5$ ☐ د) $4 \leq x < 7$



۹- عبارت‌های سمت راست را به عبارت مناسب خود در سمت چپ وصل کنید.

سمت راست	سمت چپ
(۱) برای مقایسه تعداد از این نمودار استفاده می‌شود.	الف) نمودار تصویری
(۲) برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص از این نمودار استفاده می‌شود.	ب) نمودار خط شکسته
(۳) برای مقایسه داده‌های تقریبی از این نمودار استفاده می‌شود.	پ) نمودار دایره‌ای
(۴) برای نشان دادن تعداد داده‌ها نسبت به کل از این نمودار استفاده می‌شود.	ت) نمودار ستونی

۱۰- نمره‌های ریاضی ۱۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس به صورت مقابل است.

۱۸، ۱۳، ۱۷، ۱۵، ۸، ۲۰، ۱۱، ۱۰/۵

۱۴، ۱۶، ۱۴، ۱۹، ۷، ۵، ۱۴

الف) کم‌ترین داده و بیش‌ترین داده چیست؟

ب) دامنه تغییرات داده‌ها را محاسبه کنید.

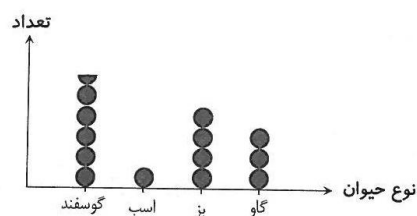
پ) اگر طول هر دسته ۵ باشد، تعداد دسته‌ها را به دست آورید.

ت) جدول مقابل را کامل کنید.

فراوانی	چوب خط	حدود دسته‌ها
		$5 \leq x <$
		$\leq x <$
		$\leq x <$

۱۱- در نمودار تصویری مقابل هر • نشان‌دهنده ۴ رأس می‌باشد، جدول را کامل کنید.

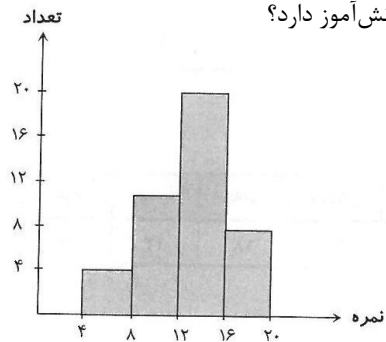
تعداد	حیوان
	گوسفند
	اسب
	بز
	گاو



۱۲- نمودار نمره‌های یک کلاس به صورت زیر است:

الف) جدول مقابل را کامل کنید.

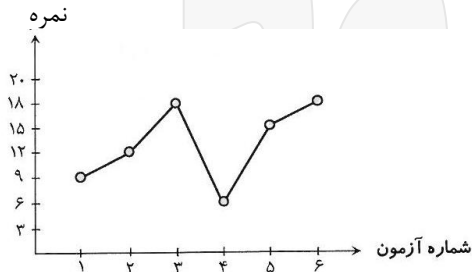
ب) این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟



حدود دسته‌ها	چوب‌خط	فراوانی
$4 \leq x < \dots$		
$\dots \leq x < \dots$		
$\dots \leq x < \dots$		
$\dots \leq x < \dots$		

۱۳- تفاوت دو دسته $4 \leq x < 10$ و $4 \leq x \leq 10$ را توضیح دهید.

۱۴- نمودار مقابل، نمره‌های فاطمه در آزمون درس زبان انگلیسی را نشان می‌دهد. باتوجه به آن به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



الف) در کدام آزمون‌ها، بیش‌ترین نمره را گرفته است؟

ب) در کدام آزمون‌ها، نمره او بالای ۱۵ است؟

پ) در کدام آزمون بیش‌ترین افت نمره را داشته است؟

ت) میانگین نمره‌ها را حساب کنید.

۱۵- با توجه به نمودار دایره‌ای مقابل، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (تمام ناحیه‌ها برابرند.)



الف) نسبت رنگی آبی به زرد چیست؟

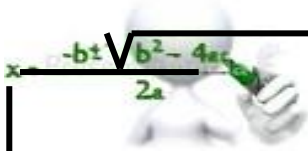
ب) نسبت رنگ سبز به کل چیست؟

پ) تقریباً چند درصد ناحیه مربوط به رنگ قرمز است؟

$$\frac{\text{قرمز}}{\text{کل}} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\text{آبی یا بنفش}}{\text{کل}} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$$

ت) تقریباً چند درصد ناحیه مربوط به رنگ آبی یا بنفش است؟



۱۶- اگر طول هر یک از دسته‌های زیر برابر ۵ باشد، در داخل مربع‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

الف) $-6 \leq x < \square$

ب) $1 \leq x < \square$

پ) $\square < x \leq 7/5$

ت) $\square \leq x < 12$

۱۷- حد پایینی دسته اول برابر ۴ و طول دسته‌ها برابر ۵ است. حد بالای دسته سوم مربوط به همان داده‌ها را به دست آورید.

۱۸- دامنه تغییرات در یک مجموعه‌ای از داده‌ها برابر ۲۴ است.

الف) اگر بخواهیم چهار دسته داشته باشیم، طول هر دسته را به دست آورید.

ب) اگر بخواهیم طول هر دسته برابر ۳ باشد، تعداد دسته‌ها چقدر است؟

۱۹- نمره‌های ریاضی ۱۸ نفر از دانش‌آموزان به صورت مقابل گزارش شده است.

۱۸، ۱۵، ۱۰، ۱۴، ۱۴، ۴، ۱۹، ۱۳، ۱۷/۵

۸، ۸، ۱۱، ۲۰، ۹، ۳، ۲، ۱۴، ۱۰/۵

الف) کم‌ترین داده چه عددی است؟

ب) بیش‌ترین داده چه عددی است؟

پ) دامنه تغییرات را به دست آورید.

ت) اگر بخواهیم این داده‌ها را به شش دسته مساوی تقسیم کنیم، طول هر

دسته را به دست آورید.

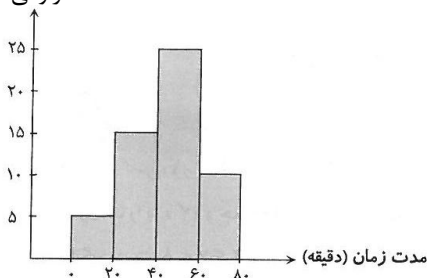
ث) جدول مقابل را کامل کنید.

ج) آیا جمع فراوانی‌ها با تعداد دانش‌آموزان برابر است؟

چ) نمودار ستونی آن را رسم کنید.

فراوانی	چوب‌خط	حدود دسته‌ها

فراوانی



۲۰- به نمودار ستونی مقابل دقت کرده و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

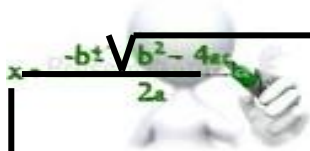
الف) جدول فراوانی را رسم کنید.

ب) داده ۵ مربوط به کدام دسته است؟ این دسته را بنویسید.

پ) تعداد کل داده‌ها را به دست آورید.

ت) بیش‌تر داده‌ها در کدام دسته قرار دارد؟

ث) آیا نمودار متقارن است یا نه؟



۲۱- نمره‌های درس ریاضی ۲۸ دانش‌آموز یک کلاس به صورت زیر است:

۱۰/۵، ۸، ۱۶/۵، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۱۳/۵، ۱۲، ۱۵/۵،

۱۶، ۱۵، ۱۸/۵، ۹/۵، ۱۲/۵، ۱۳، ۶، ۱۱/۵، ۴،

۲۰، ۱۰، ۷/۵، ۱۶/۵، ۱۴، ۱۴/۵، ۱۷/۵، ۲۰.

الف) کم‌ترین نمره را بنویسید.

ب) دامنه تغییرات را به دست آورید.

پ) اگر بخواهیم ۴ دسته داشته باشیم طول دسته را به دست آورید.

ت) جدول مقابل را کامل کنید.

ث) آیا جمع کل تعداد چوب‌خطها با تعداد دانش‌آموزان برابر است؟

چوب‌خط	حدود دسته‌ها
	جمع

۲-۸- میانگین داده‌ها

۱-۲-۸- نکات درسی

نکته ۱: میانگین هر تعداد از داده‌های آماری از حاصل تقسیم جمع آنها بر تعداد آنها به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{s}{n}$$

N = تعداد داده‌ها

S = مجموع داده‌ها

$\bar{x}$ = میانگین

مثال: نمرات یک دانش‌آموز در درس علوم ۲۰ و ۱۴ و ۱۷ و ۱۸ می‌باشد. میانگین نمرات او را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{s}{n} = \frac{20+14+17+18}{4} = \frac{69}{4} = 17.25$$

مثال: میانگین نمرات ۸ درس یک دانش‌آموز ۱۷ می‌باشد. اگر دو درس دیگر با نمرات ۱۹ و ۲۰ به آن‌ها اضافه شود میانگین جدید را به دست آورید.

$$136 = 8 \times 17 = \text{میانگین} \times \text{تعداد} = \text{مجموع}$$

$$\left. \begin{array}{l} 136 + 19 + 20 = 175 \\ 8 + 2 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{میانگین جدید} = \frac{175}{10} = 17.5$$

مثال: میانگین نمرات ۱۰ درس یک دانش آموز ۱۶/۵ می‌باشد. اگر از دو درس او، ۱/۵ و ۲ نمره کم کنیم میانگین جدید را به دست آورید.

$$\text{مجموع} = 10 \times 16/5 = 165$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مجموع جدید} &= 165 - (1/5 + 2) = 161/5 \\ \text{میانگین جدید} &= \frac{161/5}{10} = 16/15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

(تغییر نکرده است) تعداد جدید = ۱۰

مثال: میانگین تولیدات یک کارخانه در ۶ ماه اول سال ۱۴۰۰ قطعه می‌باشد. اگر تولیدات کارخانه در هر ماه ۱۰۰ قطعه بیشتر شود، میانگین جدید را به دست آورید.

$$\text{مجموع} = 6 \times 1400 = 8400$$

$$\text{افزایش تولید} = 6 \times 100 = 600$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مجموع جدید} &= 8400 + 600 = 9000 \\ \text{میانگین جدید} &= \frac{9000}{6} = 1500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

(تغییر نکرده است) تعداد جدید = ۶

نکته ۲: میانگین هر دسته در یک جدول آماری را متوسط آن دسته می‌نامند.

نکته ۳: متوسط دسته X فراوانی: عددی است که از حاصل ضرب ستون فراوانی در ستون متوسط دسته در هر دسته به دیت می‌آید.

نکته ۴: برای محاسبه میانگین یک مسئله آماری به کمک جدول داده‌های آن از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

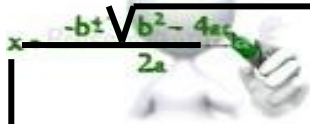
$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع ستون (متوسط دسته} \times \text{فراوانی)}}{\text{مجموع ستون (فراوانی)}}$$

مثال: در مثال درس قبل (نمره‌های درس ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره) جدول آماری را رسم کرده و میانگین نمره‌های کلاسی را به دست آورید.

پاسخ:

حدود دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	متوسط دسته	متوسط × فراوانی
$0 \leq x < 5$	/	۱	$\frac{0+5}{2} = 2/5$	$1 \times 2/5 = 2/5$
$5 \leq x < 10$	//	۲	$\frac{5+10}{2} = 7/5$	$2 \times 7/5 = 14/5$
$10 \leq x < 15$	/// //	۷	$\frac{10+15}{2} = 12/5$	$7 \times 12/5 = 84/5$
$15 \leq x \leq 20$	/// /	۶	$\frac{15+20}{2} = 17/5$	$6 \times 17/5 = 102/5$
جمع	-	۱۶	-	۲۱۰

$$\text{میانگین} = \frac{210}{16} = 13/12$$



مثال: جدول‌های آماری زیر را کامل کنید.

(الف)

متوسط × فراوانی	متوسط دسته	فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
			/// /	$15 \leq x < 25$

پاسخ:

$$\text{متوسط دسته} : \frac{15+25}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$6 = \text{خط نشان} = \text{فراوانی}$$

$$120 = \text{متوسط دسته} \times \text{فراوانی} = 6 \times 20$$

(ب)

متوسط × فراوانی	متوسط دسته	فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
		10		$42 \leq x < 47$

پاسخ: $\frac{42+47}{2} = \frac{89}{2} = 44/5$ متوسط دسته و $|||||$ فراوانی = خط نشان

$$445 = 10 \times 44/5 = \text{متوسط} \times \text{فراوانی}$$

(پ)

متوسط × فراوانی	متوسط دسته	فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
80				$6 \leq x \leq 14$

$$10 = \frac{6+14}{2} = \frac{20}{2} = \text{متوسط دسته}$$

$$8 = \frac{\text{متوسط دسته} \times \text{فراوانی}}{\text{متوسط دسته}} = \frac{80}{10} = \text{فراوانی}$$

$$||| = \text{فراوانی} = \text{خط نشان}$$

مثال: میانگین 4 عدد 29 و میانگین 6 عدد 33 می‌باشد. میانگین کل عددها چقدر است؟

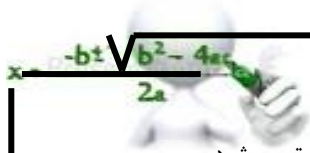
$$116 = 4 \times 29 = \text{مجموع 4 عدد}$$

$$198 = 6 \times 33 = \text{مجموع 6 عدد}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع کل جدید} = 116 + 198 = 314 \\ \text{تعداد کل جدید} = 4 + 6 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{میانگین جدید} = \frac{314}{10} = 31/4$$

نکته 5: اگر مجموع اختلاف‌های همه داده‌ها با میانگین را حساب کرده و با هم جمع کنیم مجموع آنها صفر خواهد شد.

نکته 6: اگر از بین داده‌ها، عددی را حذف کنیم که از میانگین کم‌تر است، میانگین جدید بزرگ‌تر خواهد شد.



نکته ۷: اگر از بین داده‌ها عددی را حذف کنیم که از میانگین داده‌ها بیشتر است، میانگین جدید عددی کوچک‌تر می‌شود.

۲-۲-۸- تمرینات کتاب درسی

تمرین- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش آموز $16/5$ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او که ۱۷ و ۱۵ است، به این داده‌ها اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید.

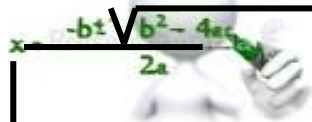
۳-۲-۸- سؤالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «×» مشخص کنید.

- ☐ الف) میانگین دسته $8 < x \leq 2$ برابر با ۵ است.
- ☐ ب) میانگین داده‌ها از خود داده‌ها کوچک‌تر است.
- ☐ پ) میانگین داده‌ها ممکن نیست با داده‌ها برابر باشد.
- ☐ ت) متوسط دسته $14 < x \leq 11$ برابر با ۱۳ می‌باشد.
- ☐ ث) فاصله بین هر دو میانگین دو دسته متوالی، همان طول دسته است.
- ☐ ج) با تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد آن‌ها، فراوانی داده‌ها به دست می‌آید.
- ☐ چ) مجموع داده‌ها برابر است با حاصل ضرب تعداد داده‌ها در میانگین آن‌ها.
- ☐ ح) اگر مجموع داده‌ها S و میانگین $\bar{x}$ و تعداد داده‌ها n باشد، داریم: $\bar{x} = S \times n$
- ☐ خ) تعداد داده‌های بالاتر از میانگین با تعداد داده‌های پایین‌تر از میانگین همیشه یکسان نیست.
- ☐ د) حاصل تقسیم مجموع ستون (فراوانی $\times$ متوسط دسته) تقسیم بر مجموع فراوانی، همان میانگین می‌باشد.
- ☐ ذ) اگر m تعداد کل داده‌ها و a مجموع ستون (فراوانی $\times$ متوسط دسته) باشد، میانگین $\frac{m}{a}$ می‌باشد.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- الف) مرکز دسته $12 < x \leq 5$ برابر است.
- ب) متوسط دسته $16 < x \leq 8$ برابر می‌باشد.
- پ) اگر به همه داده‌ها ۵ واحد اضافه شود، میانگین داده‌ها
- ت) مرکز دسته $14 < x \leq 18$ برابر می‌باشد. عدد داخل ☐ برابر است.
- ث) اگر a میانگین داده‌ها و b تعداد داده‌ها باشد، مجموع داده‌ها برابر است.
- ج) در یک بررسی آماری همه داده‌ها را سه برابر کرده‌ایم پس میانگین داده‌ها
- چ) اگر داده‌ای بیش‌تر از میانگین را از مجموع داده‌ها کم کنیم، میانگین جدید می‌شود.
- ح) اگر میانگین را از هر داده کم کنیم و اعداد به دست آمده را جمع کنیم برابر می‌باشد.
- خ) مجموع نمره‌های فاطمه در ۴ درس برابر ۷۰ است. میانگین او در این ۴ درس برابر است.
- د) میانگین سه عدد ۱۵ می‌باشد. اگر به یکی از اعداد ۶ واحد اضافه کنیم، میانگین جدید است.
- ذ) اگر هر داده را از میانگین داده‌ها کم کنیم و اعداد به دست آمده را جمع کنیم، حاصل برابر است.
- ر) اگر از مجموع داده‌ها یک داده کم‌تر از میانگین را کم کنیم، میانگین جدید از میانگین قبلی می‌شود.
- ز) «مجموع اختلاف داده‌های بزرگ‌تر از میانگین، با «مجموع اختلاف داده‌های کم‌تر از میانگین، همیشه است.



۳- میانگین داده‌های ۸، ۱۵ و ۲۵ برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۱۵ ☐ ب) ۱۶ ☐ ج) ۱۶/۵ ☐ د) ۱۷

۴- میانگین ۸ عدد برابر ۶ است، مجموع آن‌ها برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۴۸ ☐ ب) ۲۴ ☐ ج) ۵۰ ☐ د) ۵۶

۵- معدل ۸ درس رضا برابر ۱۹ است. اگر دو نمره به یکی از این درس‌ها اضافه کنیم، معدل جدید او برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۱۹/۰۵ ☐ ب) ۱۹/۲ ☐ ج) ۱۹/۲۵ ☐ د) ۱۹/۵

۶- میانگین ۴ نمره درس علی ۱۷/۵ است. اگر مجموع سه درس از این چهار درس برابر ۵۱ باشد، نمرهٔ درس چهارم او چند است؟

- ☐ الف) ۱۸/۵ ☐ ب) ۱۹/۵ ☐ ج) ۱۹ ☐ د) ۲۰

۷- میانگین سه داده برابر ۳۵ و میانگین چهار دادهٔ دیگر برابر ۳۴ است. میانگین این هفت عدد برابر کدام گزینه است؟

- ☐ الف) ۳۴/۵ ☐ ب) ۳۴/۴۲ ☐ ج) ۳۴/۷۵ ☐ د) ۳۴/۲۵

۸- میانگین ۴ داده برابر ۱۲ است. اگر دو دادهٔ ۷ و ۵ به آن اضافه شود، میانگین جدید برابر چیست؟

- ☐ الف) ۹ ☐ ب) ۱۰ ☐ ج) ۱۱ ☐ د) ۱۲

۹- حاصل تقسیم مجموع ستون (فراوانی × میانگین دسته) بر تعداد داده‌ها کدام گزینه است؟

- ☐ الف) مجموع داده‌ها ☐ ب) مجموع فراوانی ☐ ج) دامنهٔ تغییرات ☐ د) میانگین کل

۱۰- اگر $\bar{x}$ میانگین n داده باشد و هر داده را در ۲ ضرب کنیم و با ۳ جمع کنیم، آن‌گاه میانگین جدید برابر است با:

- ☐ الف) $2\bar{x} + 3$ ☐ ب) $\frac{1}{2}\bar{x} - 3$ ☐ ج) $3\bar{x} + 2$ ☐ د) $\frac{1}{3}\bar{x} - 2$

۱۱- میانگین چهار نمرهٔ علی در یک درس ۱۷ است. اگر مجموع سه نمرهٔ این درس برابر ۵۲ باشد، نمرهٔ چهارم او را به دست آورید.

۱۲- میانگین سه داده برابر ۱۲ است. اگر کم‌ترین داده برابر ۴ باشد، میانگین دو دادهٔ باقی‌مانده را محاسبه کنید.

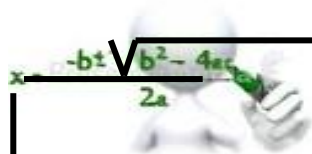
۱۳- میانگین ۲ عدد برابر ۱۵/۵ است و میانگین سه عدد دیگر برابر ۱۷ است. مجموع این اعداد را محاسبه کنید.

۱۴- با توجه به جدول مقابل:

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	خط‌نشان	دسته‌ها
۶۸				$2 \leq x < 6$
		۶		$6 \leq x < 10$

الف) جدول را کامل کنید.

ب) میانگین کل را تا یک رقم اعشار حساب کنید.



۱۵- میانگین داده برابر ۲۵ باشد و اگر داده ۳۲ را به این داده‌ها اضافه کنیم، مطلوب است:

الف) مجموع ۶ داده اولیه

ب) مجموع ۷ داده

پ) میانگین ۷ داده

مرکز دسته $\times$ فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	خط‌نشان	دسته‌ها
		۳		$2 \leq x < 7$
			###	
۵۸				
				مجموع

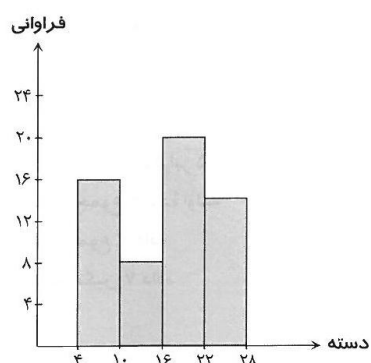
۱۶- جدول مقابل را کامل و سپس میانگین

را تا دو رقم اعشار به دست آورید.

۱۷- با توجه به نمودار ستونی مقابل:

الف) جدول زیر را کامل کنید

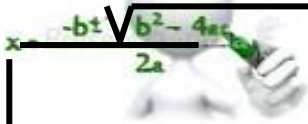
ب) میانگین را تا دو رقم اعشار به دست آورید.



مرکز دسته $\times$ فراوانی	فراوانی	مرکز دسته	دسته‌ها
			$4 \leq x < 10$
			مجموع

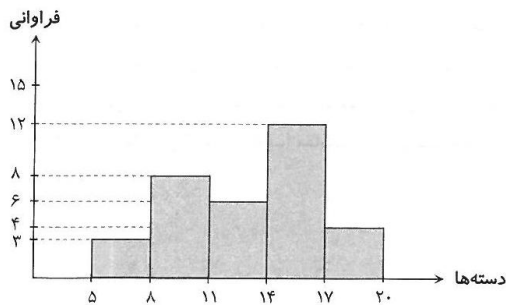
۱۸- جدول زیر را کامل کرده و سپس میانگین را به دست آورید.

مرکز دسته $\times$ فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	دسته‌ها
۱۸		۳	$4 \leq x < 8$
		۲	$8 \leq x < 12$
		۵	$12 \leq x < 16$
۱۲۶			$16 \leq x \leq 20$
			مجموع



۱۹- به نمودار ستونی زیر توجه کنید و جدول زیر را کامل کنید، سپس میانگین داده‌ها را به دست آورید.

(تا یک رقم اعشار میانگین را به دست آورید)



دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
مجموع			

۲۰- بعضی از مردم نسبت به گزیدگی پشه حساس‌اند و مدت زمانی که طول می‌کشد تا آثار حساسیت محو شود در ۴۰ نفر را اندازه‌گیری کرده‌اند

که به صورت زیر می‌باشد. (اعداد بر حسب دقیقه هستند).

۹/۵	۱۰/۳	۱۱/۴	۱۲/۷	۱۵/۵	۸/۴	۱۲/۳
۱۴/۱	۱۲/۳	۱۰/۲	۸/۵	۱۱/۳	۱۳/۲	۱۲/۵
۴/۸	۹/۲	۱۲/۲	۱۴/۹	۱۱/۹	۱۴/۱	۹/۳
۱۰/۹	۱۵/۶	۷/۵	۳/۵	۹/۸	۱۲/۲	۱۳/۷
۱۱/۷	۱۰/۲	۹/۷	۶/۷	۸/۲	۱۲/۵	۵/۱
۱۲/۷	۱۰/۶	۸/۴	۱۵/۲	۱۶/۳		

الف) میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد تا آثار حساسیت گزیدگی پشه

محو شود برای این ۴۰ نفر را با ماشین حساب و تا یک رقم اعشار به

دست آورید.

ب) اکنون با انتخاب ۴ دسته، داده‌های بالا را دسته‌بندی کنید

و جدول زیر را تکمیل کنید و میانگین را به کمک جدول زیر

به دست آورید و این میانگین را با میانگین واقعی در قسمت الف)

مقایسه کنید و مقدار خطا را به دست آورید.

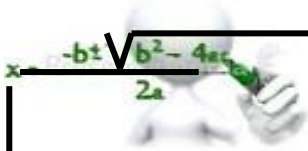
حدود دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
$3/5 \leq x <$			
$\leq x <$			
$\leq x <$			
$\leq x \leq 16/3$			
مجموع			

۳-۸- احتمال یا اندازه گیری شانس

۱-۳-۸- نکات درسی:

نکته ۱: برای محاسبه احتمال رخ دادن یک اتفاق (پیشامد) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$



مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه «پشت» بیاید چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{پشت} = 1 \text{ حالت مطلوب} \\ \text{پشت و رو} = 2 \text{ همه حالات} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{1}{2}$$

پاسخ:

مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه «زوج» بیاید چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} (2, 4, 6) \rightarrow \text{حالت مطلوب} = 3 \\ (1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightarrow \text{همه حالات} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

پاسخ:

مثال: عددهای طبیعی یک رقمی را روی کارت‌ها نوشته و یکی را به تصادف انتخاب کردیم. احتمال اینکه «عدد اول» بیاید چقدر است؟

$$\left. \begin{array}{l} (2, 3, 5, 7) \rightarrow \text{حالت مطلوب} = 4 \\ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow \text{همه حالات} = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{4}{9}$$

پاسخ:

مثال: در یک کیسه ۶ مهره سفید، ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج کرده‌ایم، احتمال اینکه «قرمز» بیاید چقدر

است؟

$$\left. \begin{array}{l} (5 \text{ قرمز}) \rightarrow \text{حالت مطلوب} = 5 \\ (6 + 5 + 4 = 15) \rightarrow \text{همه حالات} = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

پاسخ:

❖ نکته ۲: اگر پیشامدی به طور قطع رخ دهد احتمال آن مساوی یک می‌باشد.

مثال: احتمال اینکه داخل کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سبز، مهر سبز خارج شود برابر یک می‌باشد.

❖ نکته ۳: اگر پیشامدی به هیچ وجه رخ ندهد، احتمال آن مساوی صفر می‌باشد.

مثال: احتمال اینکه با پرتاب یک سکه هم «رو» بیاید و هم «پشت» برابر صفر می‌باشد.

❖ نکته ۴: در ریاضی احتمال رخ دادن هر پیشامد، یک، صفر یا عددی بین صفر و یک می‌باشد.

❖ نکته ۵: مجموع احتمال‌های ممکن در یک مسأله مساوی «یک» می‌باشد.

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم. همه احتمال‌های ممکن را محاسبه و مجموع آن‌ها را بنویسید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال «رو»} = \frac{1}{2} \\ \text{احتمال «پشت»} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع احتمال‌ها} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

پاسخ:

مثال: از درون کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۸ مهره آبی، یک مهره به تصادف خارج کرده‌ایم. همهٔ احتمال‌های ممکن را محاسبه و مجموع آن‌ها را بنویسید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال «سفید»} = \frac{5}{17} \\ \text{احتمال «سیاه»} = \frac{4}{17} \\ \text{احتمال «آبی»} = \frac{8}{17} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع احتمال‌ها} = \frac{5}{17} + \frac{4}{17} + \frac{8}{17} = \frac{17}{17} = 1$$

پاسخ:

نکته ۶: به کمک مجموع احتمال‌ها (یک) می‌توان احتمال رخ ندادن پیشامدها را محاسبه کرد.

$$\boxed{\text{احتمال رخ ندادن} = 1 - \text{احتمال رخ دادن}}$$

مثال: احتمال برخورد یک دارت به یک هدف $\frac{3}{11}$ می‌باشد. احتمال برخورد نکردن دارت به هدف چقدر است؟

$$\text{پاسخ: } \text{احتمال برخورد نکردن} = 1 - \frac{3}{11} = \frac{11-3}{11} = \frac{8}{11}$$

مثال: در پرتاب یک تاس احتمال آمدن ۶، مساوی $\frac{1}{6}$ می‌باشد. احتمال نیامدن ۶ چقدر است؟

$$\text{پاسخ: } \text{احتمال نیامدن ۶} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال: یک تاس را پرتاب کرده‌ایم. هر یک از احتمال‌های زیر را به دست آورید.

الف) ۴ بیاید $\leftarrow \frac{1}{6}$

ب) زوج بیاید $\leftarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (۲، ۴، ۶)

پ) عدد اول بیاید $\leftarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (۲، ۳، ۵)

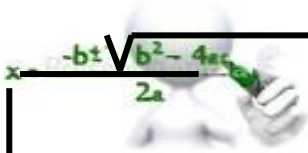
ت) ۲ و ۵ نیاید $\leftarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶)

ث) ۳ نیاید $\leftarrow \frac{5}{6}$ (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶)

ج) عدد کوچک‌تر از ۴ نیاید $\leftarrow$ یعنی (۱ و ۲ و ۳ و ۴) نیاید $\frac{4-4}{6} = \frac{0}{6} = 0$

مثال: کیسه‌ای ۳ مهره سبز، ۲ مهره زرد و ۴ مهره آبی می‌باشد. یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. هریک از احتمال‌های زیر را به دست آورید.

الف) سبز بیاید $\leftarrow$ (۳ تا سبز) $\leftarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



$$\text{ب) زر نیاید} \leftarrow \text{زرد بیاید} - 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\text{پ) سبز یا زرد بیاید} \leftarrow (3 \text{ تا سبز و } 2 \text{ تا زرد}) \frac{5}{9}$$

$$\text{ت) آبی و زر نیاید} \leftarrow \text{آبی و زرد بیاید} - 1 - \frac{6}{9} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$$

$$\text{ث) آبی نیاید} \leftarrow \text{آبی بیاید} - 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{ج) سبز و زرد و آبی نیاید} \leftarrow \frac{0}{9}$$

۳-۳-۸- تمرینات کتاب درسی

تمرین - سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به طور تصادفی از گردونه خارج می‌کنیم. احتمال هریک از حالت‌های زیر را به دست آورید:

الف) فرد بودن عدد روی مهره

ب) مضرب ۵ بودن عدد روی مهره

ج) اول بودن عدد روی مهره

تمرین - تاسی را می‌اندازیم، احتمال هریک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) مضرب ۵ بیاید

ب) شمارنده ۶ بیاید

ج) ۷ یا بیشتر بیاید

۳-۳-۸- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «×» مشخص کنید.

☐ الف) احتمال آمدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر صفر است.

☐ ب) احتمال آمدن رو در پرتاب یک سکه بیشتر از $\frac{1}{4}$ است.

☐ پ) احتمال رخ دادن یک اتفاق همیشه عددی بین صفر و یک است.

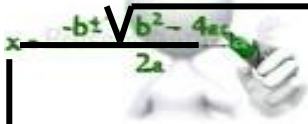
☐ ت) اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم دو حالت پشت یا رو شانس برابر دارند.

☐ ث) احتمال آمدن عدد زوج و عدد فرد در پرتاب یک تاس یکسان هستند.

☐ ج) اگر احتمال رخ دادن یک اتفاق $\frac{5}{8}$ باشد احتمال رخ ندادن آن $\frac{3}{8}$ است.

☐ چ) در پرتاب یک سکه احتمال این‌که رو بیاید یا پشت بیاید، برابر یک است.

☐ ح) در پرتاب یک تاس شانس اول بودن عدد از زوج بودن عدد بیشتر است.



- (خ) اگر سکه‌ای را ۴ بار پرتاب کنیم و هربار پشت بیاید در پرتاب پنجم حتماً پشت می‌آید.
 □ (د) اگر در پرتاب یک تاس ۱۰ بار عدد ۵ ظاهر شود در پرتاب یازدهم حتماً عدد ۵ ظاهر می‌شود.
 □ (ذ) احتمال آمدن عدد ۵ در پرتاب یک تاس با احتمال آمدن مضرب ۶ دو احتمال هم شانس هستند.

۲- جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- (الف) احتمال آمدن اعداد ۱ تا ۶ در پرتاب یک تاس برابر می‌باشد.
 (ب) در پرتاب یک سکه احتمال آمدن رو یا پشت دو حالت هستند.
 (پ) در پرتاب یک تاس احتمال این که عدد ۲ یا ۶ بیاید برابر است.
 (ت) احتمال آمدن یک عدد طبیعی در پرتاب یک تاس برابر می‌باشد.
 (ث) احتمال وقوع یک اتفاق برابر است با نسبت تعداد به تعداد
 (ج) تاسی را به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال این که عدد رو شده مضرب ۳ باشد برابر است.
 (چ) یک سکه در ۱۰ بار پرتاب رو می‌آید. احتمال دارد در پرتاب یازدهم یا بیاید.
 (ح) اگر احتمال آمدن یک مهره سبز از درون یک کیسه برابر $\frac{2}{5}$ باشد احتمال سبز نبودن مهره
 (خ) احتمال رخ دادن یک اتفاق عددی برابر یا یا عددی بین و
 (د) اگر تعداد حالت‌های مطلوب را بر تعداد همه حالت‌های ممکن تقسیم کنیم رخ دادن یک اتفاق

۳- احتمال آمدن عدد اول در پرتاب یک تاس است.

- (الف) $\frac{1}{3}$ □ (ب) بیش‌تر از $\frac{1}{3}$ □ (ج) کم‌تر از $\frac{1}{3}$ □ (د) $\frac{1}{3}$

۴- احتمال رویا پشت بودن در یک پرتاب یک سکه برابر می‌باشد.

- (الف) $\frac{1}{4}$ □ (ب) ۱ □ (ج) $\frac{1}{3}$ □ (د) $\frac{1}{4}$

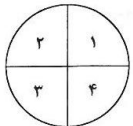
۵- اگر بدانیم حمید در ماه فروردین به دنیا آمده است. احتمال این که در دهم فروردین به دنیا آمده باشد چه قدر است؟

- (الف) $\frac{1}{31}$ □ (ب) $\frac{1}{31}$ □ (ج) $\frac{1}{4}$ □ (د) ۱

۶- ۱۵ کارت هم اندازه و هم شکل داریم که روی آن اعداد ۱ تا ۱۵ نوشته شده است. اگر یک کارت از بین آن‌ها به تصادف برداریم احتمال این که عدد روی کارت عددی اول باشد چه قدر است؟

- (الف) $\frac{2}{5}$ □ (ب) $\frac{7}{15}$ □ (ج) $\frac{8}{15}$ □ (د) $\frac{3}{5}$

۷- در شکل مقابل پس از چرخاندن عقربه احتمال این که عقربه روی عدد ۴ بایستد برابر است.



- (الف) $\frac{1}{4}$ □ (ب) ۱ □ (ج) $\frac{1}{4}$ □ (د) $\frac{1}{3}$

۸- در پرتاب یک تاس احتمال این که مضرب ۲ ظاهر شود برابر است با:

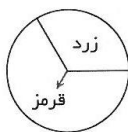
- (الف) $\frac{1}{4}$ □ (ب) $\frac{2}{3}$ □ (ج) $\frac{1}{3}$ □ (د) $\frac{4}{5}$

۹- در هر یک از شکل‌های زیر احتمال ایستادن عقربه چرخنده روی چه رنگی بیشتر است؟

(الف)



(ب)



(پ)



۱۰- تاسی را به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

(الف) احتمال این‌که عدد رو شده ۵ نباشد.

(ب) احتمال این‌که عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

(پ) احتمال این‌که عدد رو شده ۲ یا ۳ باشد.

(ت) احتمال این‌که عدد رو شده اول باشد.

۱۱- در یک کیسه ۸ مهره آبی، ۲ مهره قرمز، ۳ مهره زرد و ۶ مهره بنفش وجود دارد. یک مهره به تصادف از آن بیرون می‌آوریم.

(الف) احتمال این‌که این مهره به رنگ زرد باشد چه قدر است؟

(ب) احتمال این‌که این مهره به رنگ قرمز باشد چه قدر است؟

(پ) احتمال این‌که این مهره قرمز یا زرد باشد چه قدر است؟

(ت) احتمال این‌که این مهره بنفش نباشد چه قدر می‌باشد؟

۱۲- وقتی یک تاس را می‌اندازیم مطلوب است:

(ب) احتمال این‌که عدد ۷ بیاید.

(الف) احتمال این‌که عدد ۲ بیاید.

(ت) احتمال این‌که مضرب ۳ نباشد.

(پ) احتمال این‌که عدد زوج بیاید.

۱۳- عقربه چرخنده روبه‌رو را می‌چرخانیم مطلوب است:

(الف) احتمال این‌که سبز بیاید.

(ب) احتمال این‌که قرمز بیاید.

(پ) احتمال این‌که آبی بیاید.

(ت) احتمال این‌که قرمز نیاید.

(ث) مجموع احتمال‌های الف، ب و پ چه قدر است؟



۱۴- احتمال رخ دادن یک اتفاق $\frac{2}{5}$ است. احتمال رخ ندادن آن اتفاق چه قدر است؟

۱۵- یک تاس طوری ساخته شده که احتمال ظاهر شدن عدد ۶ در هر پرتاب برابر با $\frac{2}{3}$ است. احتمال ظاهر شدن بقیه اعداد این تاس چه قدر

است؟

۱۶- از یک جعبه که ۵۰ عدد لامپ در آن است، ۳۰ لامپ به طور تصادفی برای فروش جدا می‌کنیم. اگر ۳ لامپ از این تعداد جدا شده معیوب

باشد احتمالاً چند لامپ معیوب در جعبه ۵۰ عددی وجود دارد؟

۱۷- در یک کیسه ۲۰ تا مهره آبی، ۳۰ تا مهره قرمز و ۵۰ تا مهره سبز وجود دارد. اگر یک مهره را از کیسه به طور تصادفی بیرون بیاوریم مطلوب است:

- (الف) احتمال این که مهره قرمز باشد.
(ب) احتمال اینکه مهره سبز نباشد.
(ج) احتمال این که مهره آبی یا سبز نباشد.
(د) احتمال اینکه مهره قرمز یا سبز باشد.

۱۸- داخل یک جعبه ۸ تا مکعب قرمز، ۵ تا مکعب سبز و ۴ عدد مکعب زرد و تعدادی مکعب آبی وجود دارد. مکعب به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم احتمال این که مکعب سبز باشد $\frac{1}{5}$ است، آن‌گاه احتمال این که:

- (الف) مکعب قرمز باشد چه قدر است؟
(ب) مکعب آبی باشد چه قدر است؟
(ج) مکعب زرد نباشد چه قدر است؟
(د) مکعب سبز یا زرد باشد چه قدر است؟

۱۹- کارت هم‌اندازه و هم‌شکل داریم که روی آن اعداد را از ۱۱ تا ۳۰ نوشته‌ایم و کارت‌ها را به پشت روی میز قرار می‌دهیم. یک کارت را به تصادف برمی‌داریم. احتمال‌های زیر را حساب کنید.
(الف) احتمال این که عدد اول باشد.
(ب) احتمال این که عدد مرکب باشد.
(پ) احتمال این که عدد مضرب ۳ باشد.
(ت) احتمال این که عدد مضرب ۵ نباشد.

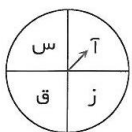


نایستد	بایستد	
		عقربه روی قرمز
		عقربه روی آبی
		عقربه روی نارنجی
		عقربه روی زرد
		عقربه روی بنفش

۲۰- شکل چرخنده مقابل را می‌چرخانیم.
(الف) احتمال‌های زیر را در جدول کامل کنید.

۲۱- احتمال مردود شدن در درس ریاضی یک آموزشگاه $\frac{1}{12}$ می‌باشد. اگر این آموزشگاه ۱۸۰ دانش‌آموز داشته باشد که همگی در امتحان ریاضی شرکت کرده‌اند. تقریباً چند نفر قبول می‌شوند؟

۲۲- شکل چرخنده مقابل را ۲۰۰ بار می‌چرخانیم. درستی یا نادرستی هر عبارت زیر را تعیین کنید.



- (الف) عقربه ۵۰ بار روی آبی می‌ایستد.
(ب) انتظار داریم عقربه ۵۰ بار روی آبی بایستد.
(ج) انتظار داریم عقربه ۱۰۰ بار روی زرد بایستد.
(د) انتظار داریم عقربه ۵۰ بار روی قرمز بایستد.

۲۳- جمعیت شهری ۳۰۰ هزار نفر است. طی نمونه‌گیری ۱۰۰۰ تایی متوجه شدیم ۶۰۰ نفر زیر ۲۰ سؤال و ۲۵۰ نفر بین ۲۰ تا ۵۰ سال و بقیه بالای ۵۰ سال سن دارند. به احتمال زیاد چه تعداد از جمعیت این شهر بین ۲۰ تا ۵۰ سال سن دارند؟

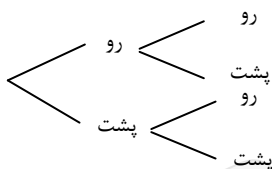
۲۴- شکل چرندۀ مقابل را ۴۰۰ بار می‌چرخانیم. انتظار داریم تقریباً تعداد ایستادن عقربه روی هر سه رنگ جداگانه چند تا باشد؟ چرا انتظار داریم تعداد ایستادن روی رنگ زرد از بقیه بیش‌تر باشد.



۴-۸- بررسی حالت‌های ممکن

۱-۴-۸- نکات درسی:

نکته ۱: برای محاسبه هر نوع احتمال در یک مسئله، نیاز به تعداد کل حالت‌های ممکن داریم. برای به دست آوردن کل حالت‌های ممکن می‌-



توان از جدول نظام‌دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال: دو سکه را با هم پرتاب کرده‌ایم. حالت‌های ممکن را بنویسید.

پاسخ: با استفاده از نمودار درختی خواهیم داشت:

حالت‌های ممکن = (رو، رو) و (رو، پشت) و (پشت، رو) و (پشت، پشت).

مثال ۲: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. حالت‌های ممکن را بنویسید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱ و ۱	۱ و ۲	۱ و ۳	۱ و ۴	۱ و ۵	۱ و ۶
۲	۲ و ۱	۲ و ۲	۲ و ۳	۲ و ۴	۲ و ۵	۲ و ۶
۳	۳ و ۱	۳ و ۲	۳ و ۳	۳ و ۴	۳ و ۵	۳ و ۶
۴	۴ و ۱	۴ و ۲	۴ و ۳	۴ و ۴	۴ و ۵	۴ و ۶
۵	۵ و ۱	۵ و ۲	۵ و ۳	۵ و ۴	۵ و ۵	۵ و ۶
۶	۶ و ۱	۶ و ۲	۶ و ۳	۶ و ۴	۶ و ۵	۶ و ۶

پاسخ: اولین ستون افقی اعداد مربوط به تاس اول و اولین ستون عمودی اعداد ۱ تا ۶ مربوط به تاس دوم می‌باشد.

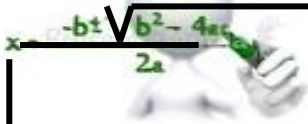
یعنی هر شماره از تاس اول ممکن است با ۶ شماره از تاس دوم بیاید مثلاً برای شماره ۱ از تاس اول داریم (۱ و ۶) و (۱ و ۵) و (۱ و ۴) و (۱ و ۳) و

و (۱ و ۲) و (۱ و ۱)

یعنی ۶ حالت برای شماره ۱ تاس اول وجود دارد. در نتیجه کل حالت‌های ممکن ۳۶ حالت می‌شود.

مثال: از داخل کیسه‌ای حاوی ۳ مهره‌ی سیاه و سفید و سبز، به ترتیب مهره‌ها را به تصادف خارج کرده‌ایم. حالت‌های ممکن پیش آمده را

بنویسید.



پاسخ: با توجه به جدول مقال ۶ حالت ممکن است پیش بیاید.

مهره سوم	مهره دوم	مهره اول
سبز	سفید	سیاه
سفید	سبز	سیاه
سبز	سیاه	سفید
سیاه	سبز	سفید
سفید	سیاه	سبز
سیاه	سفید	سبز

مثال: به کمک رسم نمودار درختی حساب کنید در یک آزمون که سه سوال دو گزینه‌ای (درست یا نادرست) دارد:

الف) احتمال اینکه هر سه سوال به طور تصادفی درست جواب داده شود.

پاسخ: کل حالت‌ها ۸ حالت می‌باشد که عبارتند از:

{(د،د،د) و (د،د،غ) و (د،غ،د) و (د،غ،غ) و (غ،د،د) و (غ،د،غ) و (غ،غ،د) و (غ،غ،غ)}

حالت (د،د،د) یک مورد است $\leftarrow$ احتمال = $\frac{1}{8}$

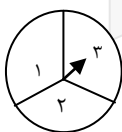
ب) هیچ سوالی درست جواب داده نشود.

پاسخ: حالت (غ،غ،غ) یک مورد است $\leftarrow$ احتمال = $\frac{1}{8}$

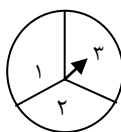
پ) تعداد سوالات صحیح پاسخ داده شده بیش‌تر باشد.

پاسخ: {(د،د،غ) و (د،غ،د) و (غ،د،د) و (د،د،د)} $\leftarrow$ احتمال = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

مثال: دو چرخنده‌ی زیر را می‌چرخانیم.



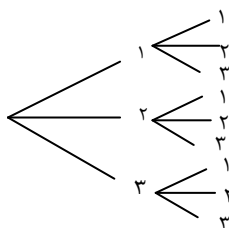
چرخنده اول



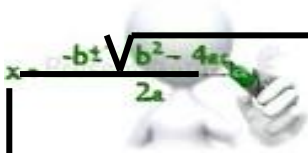
چرخنده دوم

الف) همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

پاسخ: با توجه به نمودار مقابل ۹ حالت ممکن است اتفاق بیفتد.



ب) احتمال آنکه هر دو چرخنده روی شماره ۲ توقف کند چه قدر است؟



پاسخ: در یک حالت اتفاق می افتد بنابراین $\frac{1}{9}$ = احتمال هر دو روی ۲

پ) احتمال اینکه یکی روی ۱ و دیگری روی ۳ بایستد چه قدر است؟

پاسخ: دو حالت (۱ و ۳) و (۳ و ۱) بنابراین $\frac{2}{9}$ = احتمال یکی ۱ و یکی ۳

نکته ۲: برای به دست آوردن تعداد کل حالت های ممکن برای یک پیشامد ترکیبی کافی است تعداد حالت های ممکن در هر پیشامد را در هم ضرب کنیم.

مثال: تعداد حالت های ممکن در پرتاب دو سکه $2 \times 2 = 4$

مثال: تعداد حالت های ممکن برای پرتاب دو تاس $6 \times 6 = 36$

مثال: تعداد حالت های ممکن برای دو چرخنده سه قسمتی $3 \times 3 = 9$

۳-۴-۸- تمرینات کتاب درسی

تمرین - در یک کارخانه ی دوچرخه سازی دو مدل دوچرخه تولید می شود: دوچرخه ی جاده و دوچرخه ی کوهستان. در این کارخانه هر دو نوع

دوچرخه در سه رنگ (زرد، قرمز و آبی) و دو اندازه (۲۴ و ۲۶) تولید می شود.

الف) چند نوع دوچرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟

ب) در نشریه ی تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دوچرخه ها آمده است. علی یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می -

کند. احتمال اینکه در این صفحه دوچرخه ی کوهستانی آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چه قدر است؟

تمرین - دو تاس را می اندازیم:

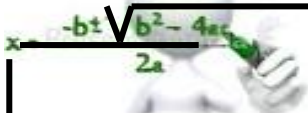
الف) با رسم جدول مناسب، همه ی ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه یکی از تاس ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چه قدر است؟

د) پاسخ قسمت های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوتشان را بنویسید.

تمرین - دو سکه را می اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟



تمرین - لوله‌های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دو شاخه می‌شوند. پس از طی کردن ۵ قسمت چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان‌دار نشان دهید.

۳-۴-۸- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «×» مشخص کنید.

- ☐ الف) در پرتاب سه سکه ۶ حالت ممکن وجود دارد.
- ☐ ب) تعداد حالت‌های ممکن در پرتاب یک تاس ۶ حالت است.
- ☐ پ) دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم ۳۶ حالت ممکن وجود دارد.
- ☐ ت) با حروف کلمه نیلوفر ۱۲۰ کلمه سه حرفی با حروف متفاوت می‌توان نوشت.
- ☐ ث) اگر دو شاخه گل از بین سه نوع گل انتخاب کنیم ۸ حالت ممکن وجود دارد.
- ☐ ج) اگر یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب کنیم ۱۲ حالت ممکن تشکیل می‌شود.
- ☐ چ) سه سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم احتمال این که هر سه سکه رو بیاید $\frac{1}{8}$ است.
- ☐ ح) با ارقام ۶، ۳، ۵ و ۴ می‌توان ۱۲ عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری نوشت.
- ☐ خ) خانواده‌ای ۳ فرزند دارند احتمال این که هر سه فرزند پسر یا دختر باشند برابر $\frac{1}{8}$ است.
- ☐ د) رمز یک قفل یک عدد دو رقمی است، تعداد حالت‌های ممکن برای این رمز ۹۰ حالت است.

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- الف) سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم تعداد حالت‌های ممکن می‌باشد.
- ب) دو سکه را می‌اندازیم احتمال این که حداکثر ۱ بار رو بیاید برابر است.
- پ) در پرتاب سه سکه احتمال این که حداقل یک بار پشت بیاید برابر می‌باشد.
- ت) احتمال این که مجموع دو عدد رو شده در پرتاب دو تاس ۷ باشد برابر است.
- ث) در پرتاب ۲ تاس احتمال این که مجموع دو عدد رو شده ۱۰ باشد برابر است.
- ج) اگر سه تاس را با هم پرتاب کنیم تعداد همه حالت‌های ممکن برابر خواهد بود.
- چ) با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ به تعداد عدد دو رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت.
- ح) مهسا می‌خواهد دو شاخه گل از بین ۴ نوع مختلف گل انتخاب کند به طریق می‌تواند انتخاب کند.
- خ) چرخنده مقابل را دو بار می‌چرخانیم احتمال این که هر دو بار روی رنگ آبی بایستد برابر می‌باشد.



۳- کدام یک می‌تواند حالت‌های ممکن در پرتاب سه تاس باشد؟

- ☐ الف) ۲۱۶ ☐ ب) ۳۶ ☐ ج) ۶ ☐ د) ۳

۴- شکل چرخنده مقابل را ۴۰۰ بار می‌چرخانیم. انتظار داریم تقریباً تعداد ایستادن عقربه روی هر سه رنگ جداگانه چند تا باشد؟ چرا انتظار داریم تعداد ایستادن روی رنگ زرد از بقیه بیش تر باشد.



۵- رمز کیف علیک عدد سه رقمی از بین ارقام ۲، ۳، ۸ و ۹ می‌باشد اگر او رمز کیف خود را فراموش کند چند عدد سه رقمی را باید آزمایش کند؟

- ☐ الف) ۱۲ ☐ ب) ۲۴ ☐ ج) ۶۴ ☐ د) ۱۶

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

۶- از شهر a تا شهر b سه مسیر وجود دارد و از شهر b تا شهر c چهار مسیر وجود دارد. به چند حالت می‌توان از شهر a از میان شهر b به شهر c رفت؟

□ (د) ۸

□ (ج) ۶

□ (پ) ۱۲

□ (الف) ۷

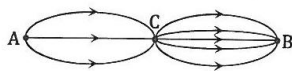
۷- دو تاس را با هم به هوا پرتاب می‌کنیم مطلوب است:

(الف) تمام حالت‌هایی که در آن عددهای رو شده برابر باشند را بنویسید.

(ب) تمام حالت‌هایی که در آن مجموع عددهای ظاهر شده برابر ۹ باشند را بنویسید.

(پ) تمام حالت‌هایی که در آن ضرب عددهای ظاهر شده برابر ۱۰ باشند را بنویسید.

۸- برای رفتن از نقطه A به نقطه B در شکل زیر مسیرهای ممکن مشخص شده است. به چند طریق می‌توان از طریق نقطه C از A به B رفت؟



۹- حسین می‌خواهد دو شاخه گل رز برای مادرش بخرد. فروشنده می‌گوید سه نوع گل رز به رنگ‌های آبی و قرمز و سفید وجود دارد، او دو شاخه گل به تصادف برمی‌دارد.

	آبی	قرمز	سفید
آبی			
قرمز			
سفید			

(الف) به کمک جدول مقابل همه حالت‌های ممکن را پیدا کنید.

(ب) در چند حالت حداقل یکی از گل‌ها قرمز است؟

(پ) احتمال این که یکی آبی و یکی سفید باشد چه قدر است؟

۱۰- یک سکه را سه بار پشت سرهم می‌اندازیم. همه حالت‌های ممکن را به کمک نمودار درختی بنویسید. سپس احتمال آن که بار اول و دوم رو و بار سوم پشت باشد چه قدر است؟

۱۱- عقربه چرخنده روبه‌رو را سه بار می‌چرخانیم. احتمال این که هر سه بار روی رنگ قرمز بایستد چه قدر است؟



۱۲- دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال این که اولی عدد فرد و دومی عدد اول بیاید چه قدر است؟

۱۳- خانواده‌ای سه فرزند دارد.

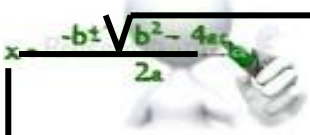
الف) همهٔ حالت‌های ممکن برای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب) احتمال اینکه حداقل ۲ تا فرزند پسر داشته باشند چه قدر است؟

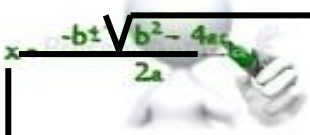
پ) احتمال اینکه هر سه فرزند دختر نباشند چقدر است.

۱۴- چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که یکان آن ۰، ۱ و ۲، دهگان آن ۵ و ۶ و صدگان آن اعداد اول باشند؟

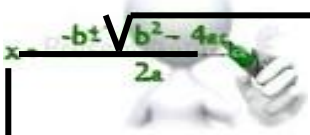
@riazicafe

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


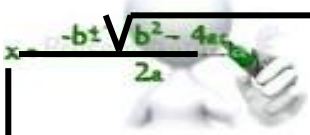
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


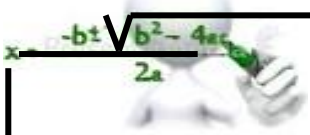
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


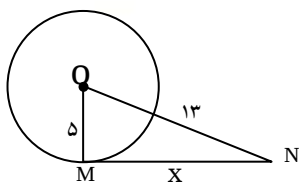
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



مثال: در شکل مقابل MN بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.

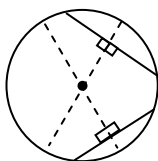


پاسخ: با توجه به نکته قبل $\hat{M} = 90^\circ$ می باشد. در نتیجه مثلث قائم الزاویه است.

طبق رابطه فیثاغورس داریم: $x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$.

❖ نکته ۴: برای پیدا کردن مرکز یک دایره به روش زیر عمل می‌کنیم:

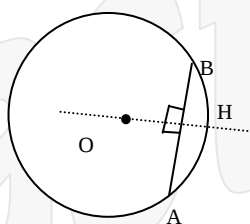
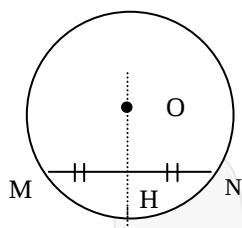
در هر دایره عمود منصف هر وتر، قطر دایره می‌باشد. بنابراین با رسم دو وتر دلخواه و رسم عمود منصف‌های آن‌ها، محل برخورد عمود منصف‌ها



(قطرہا) مرکز دائرہ را مشخص می کند.

مثال: نقطه 0 مرکز دایره می باشد.

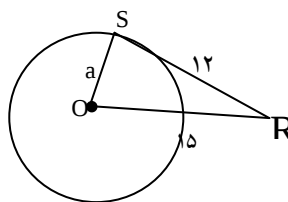
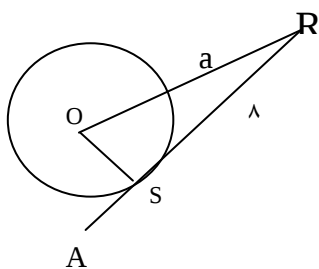
❖ نکته ۵: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود شود آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و برعکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره می‌-



گذرد بر وتر عمود است.

۲-۱-۹- تمرینات کتاب درسی:

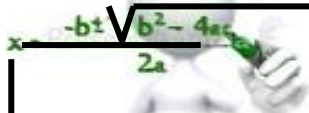
تمرین - در هر شکل، SR بر دایره مماس است. طول پاره خط a را به دست آورید.



تمرین - نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد.

از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم.

فاصله B از هریک از نقاط تماس را به دست آورید.



تمرین - از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هریک از موارد زیر را بنویسید.

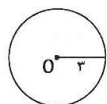
الف) چرا $\overline{OA} = \overline{OB}$ ؟

ب) چرا $\angle OO'$ نیمساز زاویه $\angle O'$ است؟

۳-۱-۹- سؤالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

- ☐ الف) دو خط موازی نقطه مشترکی ندارند.
- ☐ ب) بزرگ‌ترین وتر دایره قطر نامیده می‌شود.
- ☐ ج) فاصله هر نقطه از دایره تا مرکز آن را شعاع دایره می‌نامیم.
- ☐ د) پاره‌خطی که دو نقطه از دایره را به هم وصل می‌کند وتر نامیده می‌شود.
- ☐ ه) پاره‌خطی که از مرکز دایره می‌گذرد و بر وتری از آن دایره عمود شود، آن وتر را نصف می‌کند.
- ☐ و) بی‌شمار نقطه روی دایره می‌توان پیدا کرد که فاصله هر کدام از نقطه O برابر ۳ سانتی‌متر باشد.
- ☐ ز) یک خط و یک دایره یک نقطه یا دو نقطه مشترک داشته و یا هیچ نقطه مشترکی ندارند.
- ☐ ح) اگر یک دایره و یک وتر آن را رسم کنیم، خط تقارن شکل از مرکز دایره می‌گذرد.
- ☐ ط) نقاطی از صفحه که فاصله هر کدام از آن‌ها از نقطه O یکسان باشد روی یک خط قرار دارند.
- ☐ ث) دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله همه آن‌ها از نقطه‌ای به نام مرکز به یک اندازه باشند.
- ☐ ج) اگر شعاع دایره‌ای $2/5$ سانتی‌متر و فاصله مرکز دایره از خط d برابر ۲ سانتی‌متر باشند خط و دایره یک نقطه مشترک دارند.



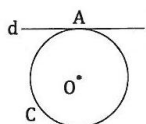
۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- الف) یک خط و یک دایره نسبت به هم وضعیت دارند.
- ب) اگر یک خط و یک دایره نقطه مشترک داشته باشند خط بر دایره مماس است.
- پ) اگر فاصله مرکز دایره‌ای از خط d کوچک‌تر از شعاع دایره باشد خط و دایره دارند.
- ت) اگر فاصله مرکز دایره‌ای از خط d بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد خط و دایره ندارند.
- ث) اگر شعاع دایره و $\overline{OH}$ فاصله مرکز دایره تا خط d و $r = \overline{OH}$ باشد خط بر دایره است.

۳- چند نقطه از صفحه می‌توان پیدا کرد که فاصله هر کدام از آن‌ها از نقطه O برابر $1/5$ سانتی‌متر باشد؟

- ☐ الف) هیچ ☐ ب) ۱ ☐ ج) ۲ ☐ د) بی‌شمار

۴- در شکل مقابل خط d بر دایره C مماس است. خط تقارن شکل در نقطه A دو زاویه درجه به وجود می‌آورد.



- ☐ الف) 45° ☐ ب) 60°
- ☐ ج) 80° ☐ د) 90°

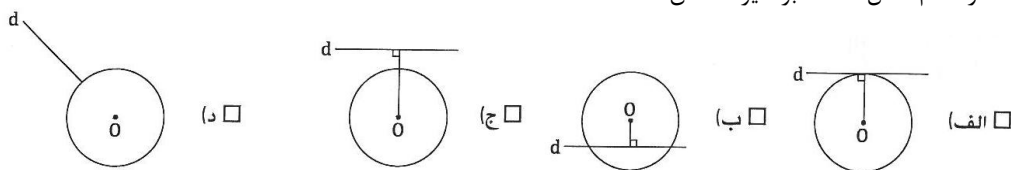
۵- اگر فاصله مرکز دایره C تا خط d بیش‌تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره نقطه مشترک دارند.

- ☐ الف) صفر ☐ ب) ۱ ☐ ج) ۲ ☐ د) بی‌شمار

۶- اگر از مرکز دایره بر وسط وتر $\overline{AB}$ از دایره C یک پاره خط رسم کنیم این پاره خط

- ☐ الف) بر وتر عمود است ☐ ب) با وتر موازی است ☐ ج) با وتر زاویه 90° می‌سازد ☐ د) الف و ج

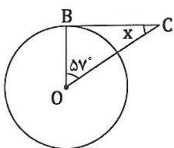
۷- در کدام شکل خط d بر دایره مماس است؟



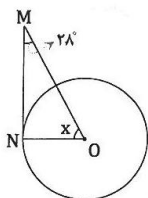
۸- مجموعه نقاطی را پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O به فاصله $1/5$ سانتی متر باشد.

O

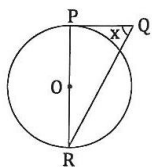
۹- در شکل مقابل $\overline{BC}$ بر دایره مماس است. با نوشتن یک معادله اندازه زاویه C را به دست آورید.



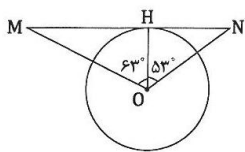
۱۰- در شکل مقابل $\overline{MN}$ بر دایره مماس است. با نوشتن معادله و حل آن اندازه زاویه O را به دست آورید.



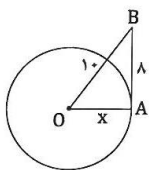
۱۱- در شکل مقابل $\overline{PQ}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{4} \overline{QR}$ بر دایره مماس است. اندازه زاویه Q چقدر است؟



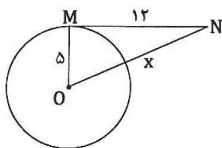
۱۲- در شکل مقابل $\overline{MN}$ در نقطه H بر دایره مماس است. اختلاف دو زاویه M و N را به دست آورید.



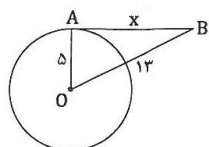
۱۳- در شکل مقابل $\overline{AB}$ بر دایره مماس است. شعاع دایره را حساب کنید. ($\overline{OB} = 10 \text{ cm}$)



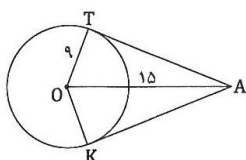
۱۴- در شکل مقابل $\overline{MN}$ بر دایره مماس است. طول $\overline{ON}$ را به دست آورید.



۱۵- در شکل مقابل طول مماس $\overline{AB}$ را به دست آورید.



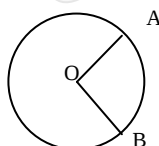
۱۶- از نقطه A دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم با توجه به اندازه‌ها، طول دو مماس را به دست آورید.



۹-۲- زوایه‌های مرکزی

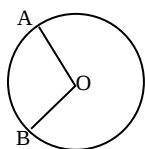
۹-۲-۱- نکات درسی

نکته ۱: زاویه مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع‌های آن شعاع‌های دایره باشند.



نکته ۲: اندازه زاویه مرکزی برابر کمان مقابلش می‌باشد. $\hat{O} = AB$

مثال: در شکل مقابل کمان AB مساوی $\frac{1}{8}$ محیط دایره می‌باشد. اندازه زاویه O را به دست آورید.

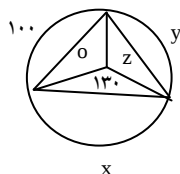


پاسخ: چون محیط دایره 360° می‌باشد. پس $AB = 360 \div 8 = 45$

و چون زاویه O زاویه مرکزی است. پس: $\hat{O} = AB = 45$

مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه و کمان‌های خواسته شده را بنویسید.

پاسخ:

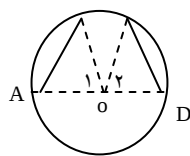


$$x = 130^\circ$$

$$y = 360 - (100 + 130) = 130^\circ$$

$$\hat{z} = y = 130^\circ$$

نکته ۳: در هر دایره، اگر دو کمان با هم مساوی باشند وترهای نظیر آنها هم با هم مساوی هستند.



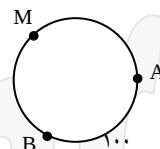
$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \text{ شعاع} \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ زیرا} \\ \overline{OB} = \overline{OD} \text{ شعاع} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض رض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \overline{AB} = \overline{CD}$$

نکته ۴: در هر دایره اگر دو وتر با هم مساوی باشند کمان‌های نظیر آنها نیز با هم مساوی هستند.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \text{ شعاع} \\ OB = OD \text{ شعاع} \\ AB = CD \text{ فرض مسئله} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض رض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow AB = CD$$

نکته ۵: کمان‌های کمتر از 180° را با دو حروف و کمان‌های بیش‌تر از 180° را با سه حرف نمایش می‌دهند.

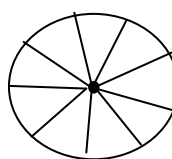
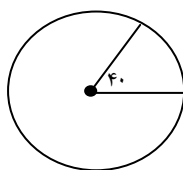
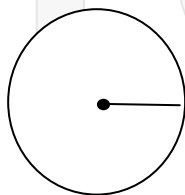
$$AMB = 260^\circ \quad AB = 100$$



نکته ۶: برای تقسیم دایره به کمان‌های مساوی طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

- ۱- یکی از شعاع‌های دایره را به دلخواه رسم می‌کنیم.
- ۲- محیط دایره را بر تعداد کمان‌های خواسته شده تقسیم کرده و به وسیله نقاله زاویه‌ای به همان اندازه رسم می‌کنیم.
- ۳- دهانه پرگار را به اندازه وتر ایجاد شده باز کرده، سوزن پرگار را روی یکی از نقاط دو سر پاره خط قرار داده و کمانی رسم می‌کنیم.
- ۴- سوزن پرگار را روی کمان ایجاد شده قرار می‌دهیم و مراحل را تکرار می‌کنیم.

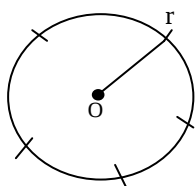
مثال: دایره‌ای رسم کرده و آن را به ۹ قسمت مساوی تقسیم کنید.



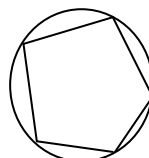
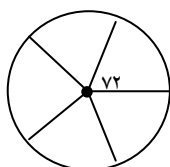
$$\text{اندازه هر کمان} = 360 \div 9 = 40^\circ$$

نکته ۷: برای تقسیم زاویه به ۶ کمان مساوی می‌توان دهانه پرگار را به اندازه‌ی شعاع دایره باز کرد و نیازی به اندازه‌گیری زاویه نیست. کافی

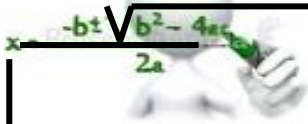
است دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره باز کنیم سپس از یک نقطه روی محیط دایره به طور متوالی کمان می‌زنیم.



$$360 \div 5 = 72^\circ$$



مثال: یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.



مثال: شکل مقابل یک ۸ ضلعی منتظم می‌باشد. اندازه زاویه‌های خواسته شده را بنویسید.

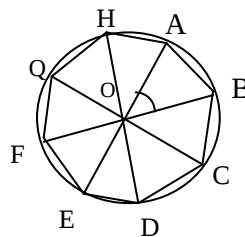
$$360 \div 8 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{X} = 45^\circ$$

$$\triangle OAB \quad \text{متساوی الساقین} \Rightarrow y = \frac{180 - 45}{2} = 67.5^\circ$$

$$\widehat{Z} = \widehat{Y} = 67.5^\circ$$

از اندازه‌های به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که هر زاویه هشت ضلعی منتظم برابر $135^\circ = 2 \times 67.5^\circ$ می‌باشد.

مثال: در شکل زیر مقدار زاویه x را بیابید.



$$\widehat{O_1} = BC = 70^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 180 - 70 = 110^\circ \Rightarrow \triangle OAB \quad \text{متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{X} = \frac{180 - 110}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

نکته ۸: در ریاضی اندازه هر زاویه 180° را با حرف π نشان می‌دهیم. مثلاً محیط دایره که 360° می‌باشد برابر است با: $360 = 2 \times 180 = 2\pi$

$$\text{یا مثلاً یک کمان } 90^\circ \text{ برابر است با: } 90 = \frac{180}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۹-۲-۲- تمرینات کتاب درسی

تمامی تمرینات داخل کتاب درسی حل می‌شود.

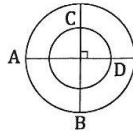
۹-۲-۳- سؤالات طبقه بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «x» مشخص کنید.

- | | |
|---|--|
| ☐ الف) تنها چهارضلعی منتظم مربع است. | ☐ ب) لوزی یک چهارضلعی منتظم است. |
| ☐ پ) قطر دایره آن را به دو کمان 180° تقسیم می‌کند. | ☐ ت) نام دیگر سه ضلعی منتظم مثلث است. |
| ☐ ث) اندازه هر زاویه شش ضلعی منتظم برابر 60° است. | ☐ ج) اندازه هر زاویه یک پنج ضلعی منتظم برابر 108° است. |
| ☐ چ) اندازه کمان مقابل به زاویه مرکزی 48° برابر 24° است. | ☐ ح) در یک دایره کمان‌های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی‌اند. |
| ☐ خ) اندازه هر زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه‌رویش برابر است. | ☐ د) دو قطر عمود بر هم، دایره را به چهار کمان 90° تقسیم می‌کنند. |
| ☐ ذ) در یک دایره وترهای نظیر کمان‌های مساوی با هم برابر نیستند. | |
| ☐ ر) اگر روی یک دایره دو نقطه قرار دهیم دو کمان مساوی به وجود می‌آید. | |
| ☐ ز) اگر طول و عرض مستطیل برابر شوند، آن مستطیل یک چهارضلعی منتظم است. | |
| ☐ ژ) اگر در یک دایره دو شعاع عمود بر هم را رسم کنیم کمان بزرگ دایره برابر 270° است. | |
| ☐ س) اگر رأس یک زاویه داخل دایره باشد و دو ضلع آن شعاع دایره، آن زاویه را مرکزی گویند. | |
| ☐ ش) به چندضلعی که هم زوایایش با هم مساوی و هم اضلاعش با هم مساوی باشند منتظم گویند. | |
| ☐ ص) اندازه هر زاویه چهارضلعی منتظم برابر 90° است و اندازه هر زاویه سه ضلعی منتظم برابر 60° است. | |

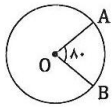
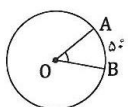
۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

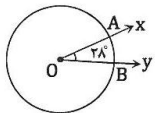
- الف) مربع یک چهارضلعی است.
 ب) مستطیل یک چهارضلعی نیست.
 پ) اندازه هر زاویه سه‌ضلعی منتظم درجه است.
 ت) اندازه هر زاویه یک پنج‌ضلعی منتظم درجه است.
 ث) اندازه هر زاویه مرکزی برابر است با روبه‌رویش.
 ج) اندازه هر زاویه یک شش‌ضلعی منتظم درجه است.
 ح) به چندضلعی منتظم گویند که با هم و با هم مساوی باشند.
 د) اگر یک دایره به شش کمان مساوی تقسیم شود اندازه هر کمان درجه است.



- ذ) در شکل مقابل اندازه کمان AB و CD هر دو 90° است ولی طول کمان AB طول کمان CD است.
 ر) اگر یک دایره را به پنج کمان مساوی تقسیم کنیم اندازه هر زاویه مرکزی مقابل به یکی از کمان‌ها درجه است.

۳- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- الف) اندازه کمان AB برابر درجه است. 
 ب) اندازه زاویه O در شکل مقابل برابر درجه است. 

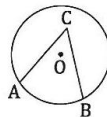
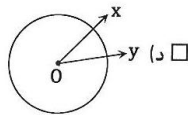


- ۴- در شکل مقابل کمان AB برابر است.
 الف) 56° ☐ ب) 28° ☐ ج) 14° ☐ د) 42° ☐

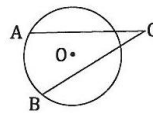
۵- عقربه دقیقه شمار در هر ۵ دقیقه حرکت چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

- الف) 15° ☐ ب) 30° ☐ ج) 45° ☐ د) 60° ☐

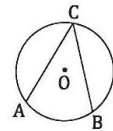
۶- کدام شکل نمایش یک زاویه مرکزی است؟



ج) ☐



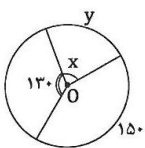
ب) ☐



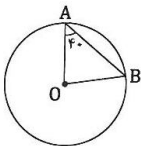
الف) ☐

۷- زاویه مرکزی را تعریف کرده و یک زاویه مرکزی رسم کنید.

۸- با توجه به شکل مقدار X و Y را به دست آورید.

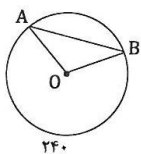


۹- با توجه به شکل اندازه زوایا و کمان خواسته شده را به دست آورید.



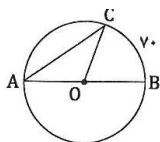
$\widehat{AB} = \dots\dots\dots$ و $\hat{O} = \dots\dots\dots$ و $\hat{B} = \dots\dots\dots$

۱۰- با توجه به شکل اندازه کمان و زوایای خواسته شده را به دست آورید.



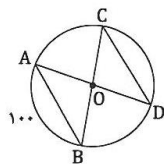
$\widehat{AB} = \dots\dots\dots$ و $\hat{O} = \dots\dots\dots$ و $\hat{A} = \dots\dots\dots$ و $\hat{B} = \dots\dots\dots$

۱۱- با توجه به شکل اندازه زوایا و کمان خواسته شده را به دست آورید.



$$\widehat{AC} = \dots\dots\dots \text{ و } \widehat{BOC} = \dots\dots\dots \text{ و } \widehat{COA} = \dots\dots\dots \text{ و } \widehat{A} = \dots\dots\dots$$

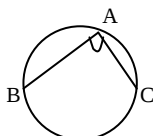
۱۲- در شکل مقابل $\widehat{AB} = 100^\circ$ است. با توجه به شکل اندازه کلیه کمان ها و زوایای موجود در شکل را بدست آورید.



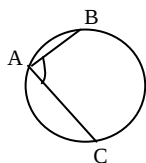
۳-۹- زاویه های محاطی

۱-۳-۹- نکات درسی:

نکته ۱: زاویه محاطی زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و ضلع های آن وترهای دایره باشند.



نکته ۲: اندازه هر زاویه محاطی با نصف کمان مقابلش مساوی می باشد. $\widehat{A} = \frac{BC}{2}$

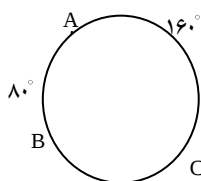


مثال: در شکل مقابل کمان BC مساوی $\frac{1}{3}$ محیط دایره می باشد. اندازه زاویه A را به دست آورید.

پاسخ: چون محیط دایره 360° می باشد. پس $360^\circ \div 3 = 120^\circ$ و چون زاویه A محاطی است. پس $\widehat{A} = \frac{BC}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$

مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه های مثلث را به دست آورید.

پاسخ:

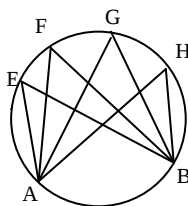


$$\widehat{B} = \frac{AC}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{AB}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ$$

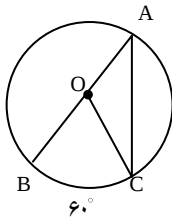
$$\widehat{A} = 180 - (80 + 40) = 60^\circ$$

نکته ۳: در هر دایره رو به رو به یک کمان، می توان بیشمار زاویه محاطی رسم کرد.



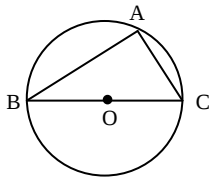
نکته ۴: زاویه‌های محاطی رو به روی یک کمان با هم برابر هستند. $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{G} = \widehat{H} = \frac{AB}{2}$

نکته ۵: اگر دو زاویه مرکزی و محاطی رو به روی یک کمان باشند، اندازه زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی می‌باشد.



$$\left. \begin{array}{l} O = BC = 60 \\ \widehat{A} = \frac{BC}{2} = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{O}}{2}$$

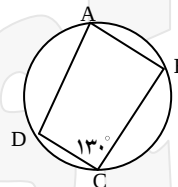
نکته ۶: در هر دایره، زاویه محاطی رو به قطر، قائمه می‌باشد.



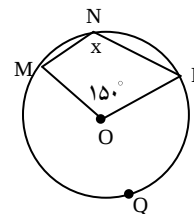
دلیل: می‌دانیم محیط دایره 360° می‌باشد و قطر دایره را نصف می‌کند در نتیجه: $BC = \frac{360}{2} = 180^\circ$

و چون $\widehat{A}$ محاطی است، بنابراین: $\widehat{A} = \frac{BC}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$

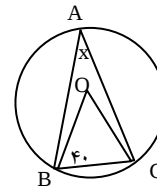
مثال: در شکل زیر مقدار X را به دست آورید.



مثال: در شکل زیر مقدار X را به دست آورید.



مثال: در شکل زیر مقدار X را به دست آورید.



$$\widehat{C} = 130^\circ \Rightarrow DAB = 26^\circ$$

$$DCB = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$$

$$\widehat{X} = \frac{DCB}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ$$

$$\text{مرکزی } O = 150^\circ \Rightarrow MNP = 150^\circ$$

$$MQP = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

$$\widehat{X} = \frac{MQP}{2} = \frac{210}{2} = 105^\circ$$

$$\text{متساوی الساقین مرکز } OB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$$

$$\text{محاطی } \widehat{O} = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ \Rightarrow BC = 100^\circ$$

$$\widehat{X} = \frac{BC}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ$$

۹-۳-۲- تمرینات کتاب درسی:

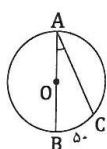
تمرین - دایره‌ای بکشید. سپس، چهار ضلعی ABCD را طوری رسم کنید که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

تمرین - چرا مجموع دو زاویه رو به رو به هم در چهار ضلعی ABCD برابر 180° است؟

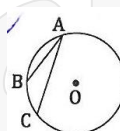
۳-۳-۹- سوالات طبقه‌بندی شده

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «×» مشخص کنید.

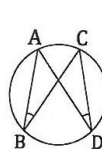
- ☐ الف) زاویه محاطی مقابل به قطر دایره برابر 90° است.
- ☐ ب) اندازه زاویه محاطی مقابل به کمان 73° برابر 144° است.
- ☐ پ) اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبه‌رویش.
- ☐ ت) اندازه هر زاویه محاطی برابر است با اندازه کمان روبه‌رویش.
- ☐ ث) به زاویه‌ای که رأس آن روی دایره باشد زاویه محاطی می‌گویند.
- ☐ ج) در یک دایره زاویه‌های محاطی مقابل به یک کمان با هم برابرند.
- ☐ چ) به زاویه‌ای محاطی گویند که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن وترهایی از دایره باشند.
- ☐ ح) اگر یک زاویه مرکزی و یک زاویه محاطی کمان مشترک داشته باشند، اندازه زاویه محاطی نصف زاویه مرکزی است.



☐ ب) اندازه زاویه A در شکل مقابل برابر 25° است.

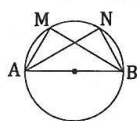


☐ الف) در شکل مقابل $\widehat{BAC}$ زاویه محاطی است.



☐ پ) با توجه به شکل می‌توان نوشت: $\widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}$

۲- هر یک از جمله‌های زیر را با یک عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

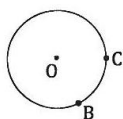


- الف) در هر دایره زاویه محاطی مقابل به قطر است.
- ب) در هر دایره زاویه محاطی مقابل به برابر 90° است.
- پ) اندازه هر زاویه محاطی برابر است با کمان روبه‌رویش.
- ت) در هر دایره زاویه‌های محاطی مقابل به یک کمان هستند.
- ث) به زاویه‌ای محاطی گویند که رأس آن و دو ضلع آن باشند.

۳- اندازه هر زاویه محاطی برابر است با کمان مقابل آن.

☐ الف) اندازه ☐ ب) نصف اندازه ☐ ج) دو برابر اندازه ☐ د) ربع اندازه

۴- چند زاویه مرکزی و چند زاویه محاطی مقابل به کمان BC می‌توان رسم کرد؟



- ☐ الف) یکی و یکی ☐ ب) یکی و دوتا
- ☐ ج) چندتا و چندتا ☐ د) یکی و بی‌شمار

۵- در شکل مقابل دایره به ۴ کمان تقسیم شده، اندازه زاویه A برابر درجه است.

۱۵۶ (د) □

۱۸۰° (ج) □

۹۰° (ب) □

۴۵° (الف) □

۶- محیط دایره‌ای را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. هر زاویهٔ محاطی مقابل به یکی از کمان‌ها چند درجه است؟

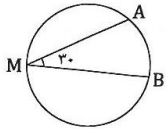
۴۰ (د) □

۱۲۰ (ج) □

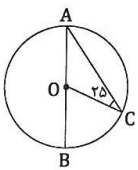
۳۰ (ب) □

۶۰ (الف) □

۷- با توجه به شکل اندازهٔ کمان‌های AB و AMB را به دست آورید.

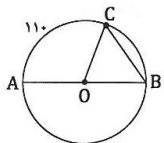


۸- با توجه به شکا اندازهٔ زوایا و کمان‌های خواسته شده را به دست آورید.



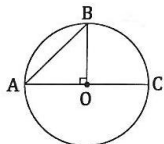
$\widehat{A} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{BC} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{B\hat{O}C} = \dots\dots\dots$

۹- با توجه به شکل اندازهٔ زوایه‌ها و کمان‌ها را به دست آورید.



$\widehat{BC} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{B\hat{O}C} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{C} = \dots\dots\dots$

۱۰- با توجه به شکل اندازهٔ زوایا و کمان‌ها را به دست آورید.



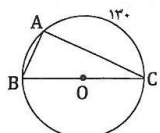
$\widehat{AB} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{BC} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{A} = \dots\dots\dots$

۱۱- در شکل مقابل $\overline{BC}$ قطر دایره است.

(الف) کمان BC چند درجه است؟

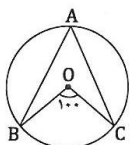
(ب) زاویهٔ A چه نوع زاویه‌ای است و چند درجه است؟

(پ) از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۱۲- با توجه به شکل اندازهٔ زوایا و کمان خواسته شده را به دست آورید.

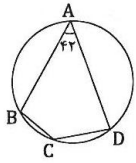
$\widehat{AB} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{ABC} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{B} = \dots\dots\dots$



۱۳- با توجه به شکل اندازهٔ کمان و زاویهٔ خواسته شده را به دست آورید.

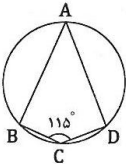
$\widehat{BC} = \dots\dots\dots$ و $\widehat{A} = \dots\dots\dots$

۱۴- با توجه به شکل اندازه کمان‌ها و زاویه خواسته شده را به دست آورید.



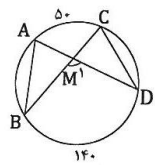
$$\widehat{BD} = \dots\dots\dots \text{ و } \widehat{BAD} = \dots\dots\dots \text{ و } \hat{C} = \dots\dots\dots$$

۱۵- با توجه به شکل اندازه زاویه A را حساب کنید.



$$\hat{A} = \dots\dots\dots$$

۱۶- با توجه به شکل اندازه زوایای خواسته شده را به دست آورید.



$$\hat{B} = \dots\dots\dots \text{ و } \hat{A} = \dots\dots\dots \text{ و } \hat{M} = \dots\dots\dots \text{ و } \hat{C} = \dots\dots\dots$$

@riazicafe